IL

NUOVO CIMENTO

ORGANO DELLA SOCIETÀ ITALIANA DI FISICA

SOTTO GLI AUSPICI DEL CONSIGLIO NAZIONALE DELLE RICERCHE

VOL. VII, N. 4 — *Serie nona* — 2 Luglio 1950

Nuclei pesanti della radiazione cosmica primaria osservati in lastre fotografiche esposte fino a 29000 m s.l.d.m.

ERRATA-CORRIGE

Pag. 390	riga 20ª	*anzichè* 27500	*leggasi* 27500 m
» 390	» penultima	» dalle	» le
» 391	» 13ª	» 1	» *l*
» 392	» 25ª	» di	» relativa

» 395 sopprimere il capoverso: Dalla relazione ecc, e la relativa formola.

m s.l.d.m., con $Z > 2$. co, l'energia limite dell'atmosfera. Sono date la distribuzione del flusso dei nuclei pesanti in funzione dell'angolo zenitale e la distribuzione dei nuclei pesanti in funzione del numero atomico. Sembra evidente che questi nuclei pesanti facciano parte della radiazione cosmica primaria. Vengono discussi due eventi particolari: 1) la parziale disintegrazione di un nucleo pesante nel vetro fra due emulsioni; 2) l'interazione di un nucleo pesante con un nucleo dell'emulsione.

1. – Introduzione.

In lastre per ricerche nucleari, esposte ai raggi cosmici ad altezze superiori ai 20000 m sul livello del mare, sono state osservate (1), (2), (3), (4) delle tracce

(1) PHILLIS FREIER, E. J. LOFGREN, E. P. NEY, F. OPPENHEIMER, H. L. BRADT e B. PETERS: *Phys. Rev.*, **74**, 213 (1948).

(2) PHILLIS FREIER, E. J. LOFGREN, E. P. NEY e F. OPPENHEIMER: *Phys. Rev.*, **74**, 1818 (1948).

(3) H. L. BRADT e B. PETERS: *Phys. Rev.*, **74**, 1828 (1948).

(4) H. L. BRADT e B. PETERS: *Phys. Rev.*, **77**, 54 (1950).

che per il loro grande potere ionizzante, possono essere attribuite a nuclei con numero atomico superiore a quello dell'elio. Tali tracce si presentano come una striscia per lo più completamente annerita, dalla quale si partono diverse piccole tracce, dovute ad elettroni lenti (detti raggi δ), appartenenti alla colonna di ionizzazione generata dal nucleo pesante quando attraversa l'emulsione fotografica. Le caratteristiche presentate da queste tracce di nuclei pesanti hanno permesso di avanzare l'ipotesi che tali nuclei facciano parte della radiazione cosmica primaria (1), (2), (3), (4). Noi abbiamo avuto, grazie all'interessamento del prof. F. Oppenheimer, alcune lastre esposte fino a 29 000 m s.l.d.m. Esaminando queste lastre abbiamo trovato delle tracce di nuclei pesanti; in questa nota riportiamo i risultati delle nostre osservazioni, risultati che sono in accordo con quelli di (1), (2), (3), (4).

2. – Identificazione delle tracce dei nuclei pesanti.

Le lastre fotografiche per ricerche nucleari da noi esaminate sono Ilford C_2, non cariche, spesse 100 micron e con una superficie di $(2{,}5 \times 7{,}5)$ cm². Tali lastre sono state portate con un pallone sonda fino a 29 000 m sul livello del

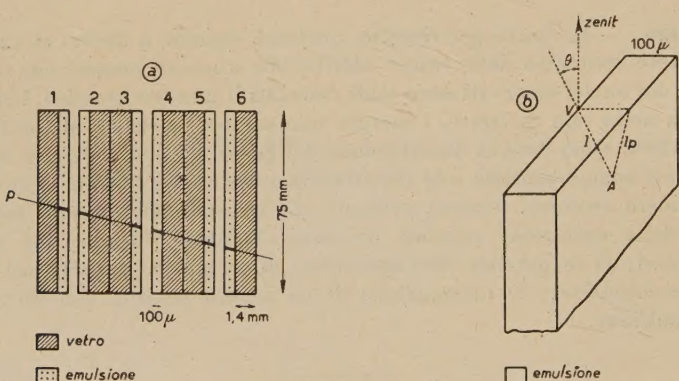


Fig. 1. – *a*) disposizione delle lastre durante il volo; *b*) emulsione di una lastra.

mare a 55° N di latitudine geomagnetica (Camp Ripley, Minnesota). Il tempo impiegato dal pallone fra il livello del suolo e 27 500 è stato di 2 h 15 m, mentre il tempo di permanenza fra 27 500 e 29 000 m è stato di 5 h 20 m. Durante il volo le lastre erano disposte verticalmente una accanto all'altra (fig. 1-*a*), entro una sfera di alluminio dello spessore di 1 mm e del diametro di 76 cm. Vicino alle lastre stavano da un lato tre condensatori elettrolitici e dall'altro una camera di Wilson, che occupava una piccola parte dell'angolo solido attorno alle lastre. Solo delle particelle incidenti con angolo zenitale maggiore di 52°, potevano attraversare la camera di Wilson.

Durante l'esplorazione al microscopio per ogni traccia che presentava raggi δ, abbiamo segnato le coordinate delle estremità A e V della traccia e la lunghezza della sua proiezione l_P sul piano della lastra (fig. 1 *b*). Per ogni lastra esaminata si è fatta su carta trasparente una pianta delle tracce osservate. Tracce su lastre diverse sono state considerate come generate dalla medesima particella quando, sovrapponendo le piante, i vari tratti venivano a cadere su di una stessa retta, avevano uguale lunghezza e quando erano uguali i tratti percorsi dalla particella nei vetri interposti fra le lastre (fig. 1 *a*, traccia P).

Per i vari tratti di una medesima traccia nelle diverse lastre sono stati contati (ad immersione omogenea, con ingrandimento di 1150 diametri) i raggi δ per 100 micron (100 μ di lunghezza effettiva 1 della traccia, fig. 1 *b*), prendendo solo i raggi δ di lunghezza $\geqslant 1{,}5$ μ e costituiti da almeno quattro granuli [5]. Il fatto che il numero dei raggi δ/100 μ, relativo ai vari tratti di una medesima traccia, restava costante entro gli errori statistici, o variava con continuità nelle diverse lastre, si può considerare come una verifica che il modo indicato per identificare i vari tratti di una traccia non lasciava possibilità d'errore. Delle tracce così identificate abbiamo considerato attribuibili a nuclei pesanti, facenti eventualmente parte della radiazione cosmica primaria, solo le tracce provenienti dal di fuori della pila di lastre con direzione dall'alto verso il basso; i tratti di tali tracce dovevano quindi ritrovarsi in tutte le emulsioni delle lastre, che erano poste lungo il percorso del nucleo pesante. Abbiamo osservato 45 tracce che soddisfacevano queste condizioni.

3. – Determinazione del numero atomico e dell'energia dei nuclei pesanti.

Solo per le tracce di 35 nuclei pesanti abbiamo potuto determinare il numero atomico dato che le altre, trovandosi vicino ai bordi delle lastre, presentavano un percorso troppo piccolo nella pila di lastre. Per queste 35 tracce non si è potuto determinare il percorso residuo, perchè nessuna di esse finisce nell'emulsione. Ne segue che per calcolare il numero atomico abbiamo preso i valori limiti del percorso residuo. Si è considerato come percorso residuo minimo, R_m, quello costituito dai tratti della traccia nelle varie emulsioni e nei vetri interposti fra esse. Il percorso residuo massimo si è ottenuto assumendo che la particella sia al minimo di ionizzazione all'entrata della pila di lastre e che quindi abbia un percorso residuo infinito.

Per calcolare il numero atomico Z di un nucleo pesante sono state usate

(5) La determinazione del numero dei raggi δ/100 μ equivale a quella del conto dei granuli che si fa per l'identificazione delle tracce di particelle che, essendo meno ionizzanti, presentano una traccia meno densa.

le curve di BRADT e PETERS ([3]), nelle quali il numero n_δ di raggi $\delta/100\ \mu$ è riportato in funzione del percorso residuo R per valori di Z fra 2 e 40. I valori di n_δ adoperati per costruire tali curve sono stati calcolati colla formula

$$n_\delta = \left(\frac{Z^2}{4}\right)\left[\frac{n_\alpha \cdot \beta^2(R_\alpha)}{\beta^2\left(\frac{RZ}{2}\right)}\right],$$

dove $n_\alpha\beta^2(R_\alpha) = 0{,}075$ raggi $\delta/100\ \mu$.

La validità di tali curve per le nostre lastre è stata verificata calcolando il termine $n_\alpha \cdot \beta^2(R_\alpha)$ per le particelle α terminanti nell'emulsione delle nostre lastre.

Usando le curve di BRADT e PETERS, il numero di raggi $\delta/100\ \mu$ nel primo tratto della traccia (col. 2, tab. I) e il percorso residuo minimo, R_m, (col. 3, tab. I), si è determinato il valore minimo del numero atomico, Z_m, (col. 4, tab. I); usando lo stesso numero di raggi $\delta/100\ \mu$ ed un percorso infinito si è ottenuto il valore massimo del numero atomico, Z_M, (col. 5, tab. I). Allo scopo di diminuire l'errore statistico il numero dei raggi $\delta/100\ \mu$ è stato determinato usando i tratti della traccia in due emulsioni affacciate.

Tre delle tracce dei 35 nuclei pesanti terminano nel vetro fra due emulsioni, ma il percorso di questi tre nuclei pesanti nella pila di lastre è troppo breve per potere osservare una variazione del numero dei raggi $\delta/100\ \mu$; ne segue che non sappiamo se tali nuclei si sono fermati nel vetro perchè sono giunti alla fine del loro percorso o perchè hanno generato stelle. Per questi tre nuclei pesanti si è preso come percorso massimo quello minimo osservato, più il percorso nel vetro interposto fra l'ultima emulsione nella quale la traccia è stata osservata e l'emulsione successiva.

Per determinare l'energia di ad un nucleo pesante di numero atomico Z e di percorso residuo R, è stata adoperata la curva data da FREIER, LOFGREN, NEY e OPPENHEIMER ([2]) nella quale $E/\mu c^2$ è dato in funzione di $Z^2R/\mu c^2$ (con $\mu c^2 = 2\ (0{,}93)\ Z$ GeV). Usando il valore minimo del percorso residuo, R_m, ed il valore minimo del numero atomico, Z_m, è stata ricavata l'energia minima, E_m, posseduta dai nuclei pesanti quando hanno attraversato il primo tratto della traccia osservato nella pila di lastre. I valori ottenuti sono riportati nella colonna 6 della tab. I.

Abbiamo calcolato l'energia minima posseduta dai nuclei pesanti all'entrata dell'atmosfera per vedere se tali nuclei avevano energia sufficiente per attraversare il campo magnetico terrestre e quindi se essi potevano far parte della radiazione cosmica primaria. Tale energia minima, E_{mA}, è stata determinata usando il valore minimo, Z_m, del numero atomico e prendendo come percorso quello minimo R_m, più quello attraverso il vetro delle lastre precedenti il primo tratto di traccia osservato, più quello attraverso i 14 g cm^{-2} di atmosfera

TABELLA I. – *Caratteristiche di alcuni dei nuclei pesanti osservati.*

1	2	3	4	5	6	7
Nucleo pesante	Raggi δ/100 μ nel primo tratto della traccia	R_m = percorso fra il primo e l'ultimo tratto della traccia in g cm^{-2}	Z_m = valore minimo del numero atomico	Z_M = valore massimo del numero atomico	E_m = energia minima nel primo tratto della traccia in GeV	E_{mA} = energia minima all'entrata dell'atmosfera in GeV
6_2	12,5 $\pm$ 1,8	3,298	13	25	4,08	16,4
6_3	6,15 $\pm$ 1,3	2,74	8	18	1,36	5,8
6_6	14,4 $\pm$ 2,4	2,14	13	28	3,15	14
6_9	5,38 $\pm$ 0,98	3,7	7	17	1,63	5,3
6_{11}	8,07 $\pm$ 1,75	4,121	11	21	3,57	9,45
6_{12}	7,52 $\pm$ 1,77	3,62	10	20	2,88	8
3_4	11 $\pm$ 1,4	2,25	11	24	2,6	12,5
4_9	8,06 $\pm$ 0,86	4,56	11	20	3,88	10,2
6_{10}	4,3 $\pm$ 0,94	4,67	7	15	2,38	5,2
4_{16}	5,64 $\pm$ 0,88	2,91	8	17	1,79	5,8
2_1	12,6 $\pm$ 1,9	4,18	14	25	5,2	13

sovrastanti le lastre durante il volo. I valori così trovati sono stati riportati nella colonna 7 della tab. I.

Perchè un nucleo pesante possa attraversare il campo magnetico terrestre a 55° N di latitudine geomagnetica, esso deve avere una energia per nucleone di almeno 0,35 GeV al limite dell'atmosfera (6). Dai valori dell'energia minima all'entrata dell'atmosfera (col. 7, tab. I) ricaviamo i valori minimi dell'energia per nucleone all'entrata dell'atmosfera. I risultati ottenuti sono riportati in fig. 2. Come si vede dal grafico la maggior parte dei valori minimi relativi a $Z < 8$ sono inferiori a 0,35 GeV. Questo segue dal fatto che nella nostra pila di lastre di superficie $(2{,}5 \times 7{,}5)$ cm² è stata registrata solo una piccola parte del percorso dei nuclei pesanti e di questo percorso ci siamo serviti per calcolare i valori minimi dell'energia e del numero atomico. Tale percorso per i nostri nuclei pesanti è al massimo di 7 g cm^{-2}, mentre si è visto (4) che i nuclei pesanti, se non si disintegrano, possono attraversare un numero molto maggiore di g cm^{-2}. Si può quindi supporre che i 35 nuclei pesanti abbiano tutti energia sufficiente per attraversare il campo magnetico terrestre. Dalla fig. 2 si vede pure che l'energia per nucleone aumenta col crescere del numero atomico.

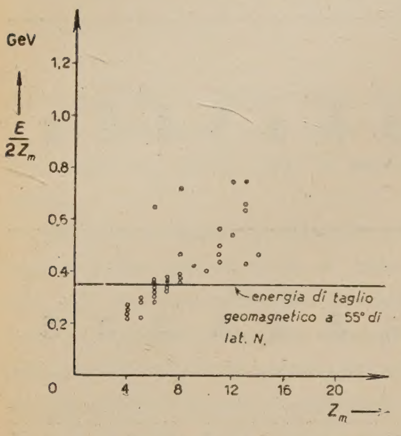


Fig. 2. – Energia per nucleone $(E/2Z_m)$ in funzione del numero atomico Z_m: ○ valori minimi; ● valori massimi relativi ai tre nuclei pesanti che terminano nella pila di lastre.

4. – Distribuzione angolare del flusso dei nuclei pesanti.

Se indichiamo con S la superficie di una lastra in cm², con t il tempo d'esposizione in secondi, con $N_i(\theta)$ il numero di tracce di lunghezza effettiva l_i (espressa in micron), trovate sulla superficie S e aventi un angolo zenitale compreso fra θ e $\theta + \Delta\theta$, il flusso reale dei nuclei pesanti con $Z > 2$ a 14 g cm^{-2} di atmosfera residua sarà dato dalla relazione

$$(a) \qquad I(\theta) = \frac{\sum_i \frac{N_i(\theta) \cdot l_i}{100}}{S \cdot t \cdot 2\pi \operatorname{sen} \theta \cdot \Delta\theta} \text{cm}^{-2}\,\text{s}^{-1}\,\text{sterad}^{-1}\,,$$

(6) M. S. VALLARTA: *Phys. Rev.*, **74**, 1837 (1948).

dove $\Delta\theta$ è espresso in radianti e 100 è lo spessore dell'emulsione espresso in micron.

Eseguendo il calcolo si ha la distribuzione angolare del flusso riportata in fig. 3. La rapida diminuzione del flusso col crescere dell'angolo zenitale è

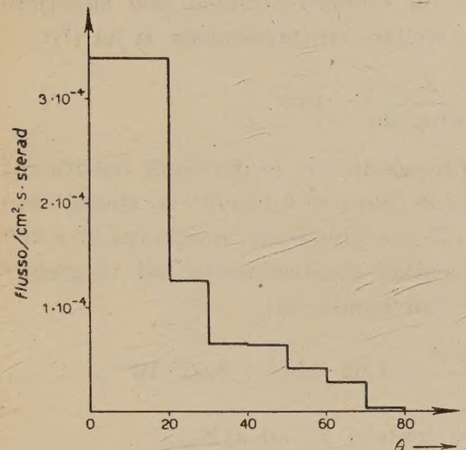


Fig. 3. – Flusso/cm² s sterad dei nuclei pesanti in funzione dell'angolo zenitale.

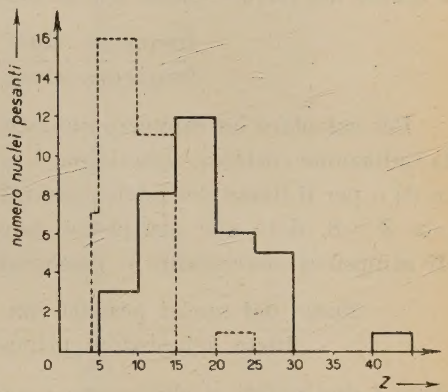


Fig. 4. – Frequenza dei nuclei pesanti in funzione del numero atomico Z:
- - - - - - - - - valori relativi a Z minimo;
———— valori relativi a Z massimo.

dovuta all'aumentare dell'assorbimento nell'atmosfera dei nuclei pesanti col crescere del loro angolo zenitale. Da tale diminuzione si può dedurre che i nuclei pesanti non hanno avuto origine in disintegrazioni nucleari, prodotte da protoni primari, perchè la distribuzione di questi ultimi è praticamente isotropa a 29 000 m.

Dalla relazione (a) si ottiene pure il valore del flusso totale

$$I_0 = \sum_i \frac{\dfrac{N_i \cdot l_i}{100}}{S \cdot t \cdot 2\pi} = 0{,}554 \cdot 10^{-4}\ \text{cm}^{-2}\ \text{s}^{-1}\ \text{sterad}^{-1}\,.$$

5. – Distribuzione dei nuclei pesanti in funzione del numero atomico.

La fig. 4 mostra la distribuzione dei nuclei pesanti in funzione del loro numero atomico Z e precisamente, usando i valori minimi, Z_m, si è ottenuta la spezzata tratteggiata e usando i valori massimi, Z_M, la spezzata a tratto continuo.

Dalla fig. 4 si vede che vi sono diversi nuclei pesanti aventi uno Z_m maggiore di quello degli atomi costituenti l'atmosfera terrestre. Questo esclude

l'ipotesi che i nuclei pesanti abbiano avuto origine in disintegrazioni nucleari degli atomi dell'atmosfera.

Dalla fig. 4 si deduce che la maggior parte dei nuclei pesanti ha numero atomico inferiore a 25. Anche gli elementi costituenti la materia stellare e interstellare hanno, per la massima parte, un numero atomico non superiore a quello del ferro. Inoltre per la materia stellare ed interstellare si ha [7]:

$$\frac{\text{frequenza atomi con } Z > 8}{\text{frequenza atomi d'idrogeno}} = 10^{-4} .$$

Per calcolare un rapporto analogo al precedente per le particelle costituenti la radiazione cosmica, usiamo per i protoni il valore di $0{,}12/\text{cm}^2 \cdot \text{s} \cdot \text{sterad}$ dato in [8] e per il flusso dei nuclei pesanti con $Z > 8$ prendiamo quello fra 0° e 20° con $Z > 8$, dato che per piccoli angoli zenitali l'assorbimento nei 14 g cm^{-2} di atmosfera sovrastante è trascurabile. Troviamo così:

$$\frac{\text{flusso dei nuclei pesanti con } Z > 8}{\text{flusso dei protoni primari}} = 1{,}66 \cdot 10^{-3} \div 3{,}02 \cdot 10^{-3} ,$$

dove i due valori si riferiscono rispettivamente a Z_m ed a Z_M.

Il rapporto relativo alla materia stellare è più piccolo di un fattore 10 di quello relativo alle particelle dei raggi cosmici. Tale differenza può essere dovuta ad errore nella misura, oppure può spiegarsi colla seguente ipotesi avanzata da BRADT e PETERS [4]. Supponendo che l'accelerazione dei raggi cosmici abbia inizio nei dintorni del Sole, poichè nella atmosfera solare una parte degli atomi d'idrogeno è neutra mentre tutti gli atomi dei metalli sono fortemente ionizzati, si avrebbe che il rapporto

$$\frac{\text{atomi con } Z > 8 \text{ accelerati}}{\text{atomi di H accelerati}}$$

sarebbe maggiore del rapporto

$$\frac{\text{frequenza atomi con } Z > 8}{\text{frequenza atomi di H}}$$

nella materia stellare ed interstellare.

6. – Conclusioni.

Riassumendo, i nuclei pesanti osservati nelle nostre lastre possono considerarsi appartenenti alla radiazione cosmica primaria come quelli osservati da altri autori [1], [2], [3], [4], perchè:

1) hanno energia sufficiente per attraversare il campo magnetico terrestre;

---

(7) C. S. BEALS: *Monthly Notices, Roy. Astr. Soc.*, **102**, 96 (1942).
(8) J. A. VAN ALLEN e H. E. TATEL: *Phys. Rev.*, **73**, 245 (1948).

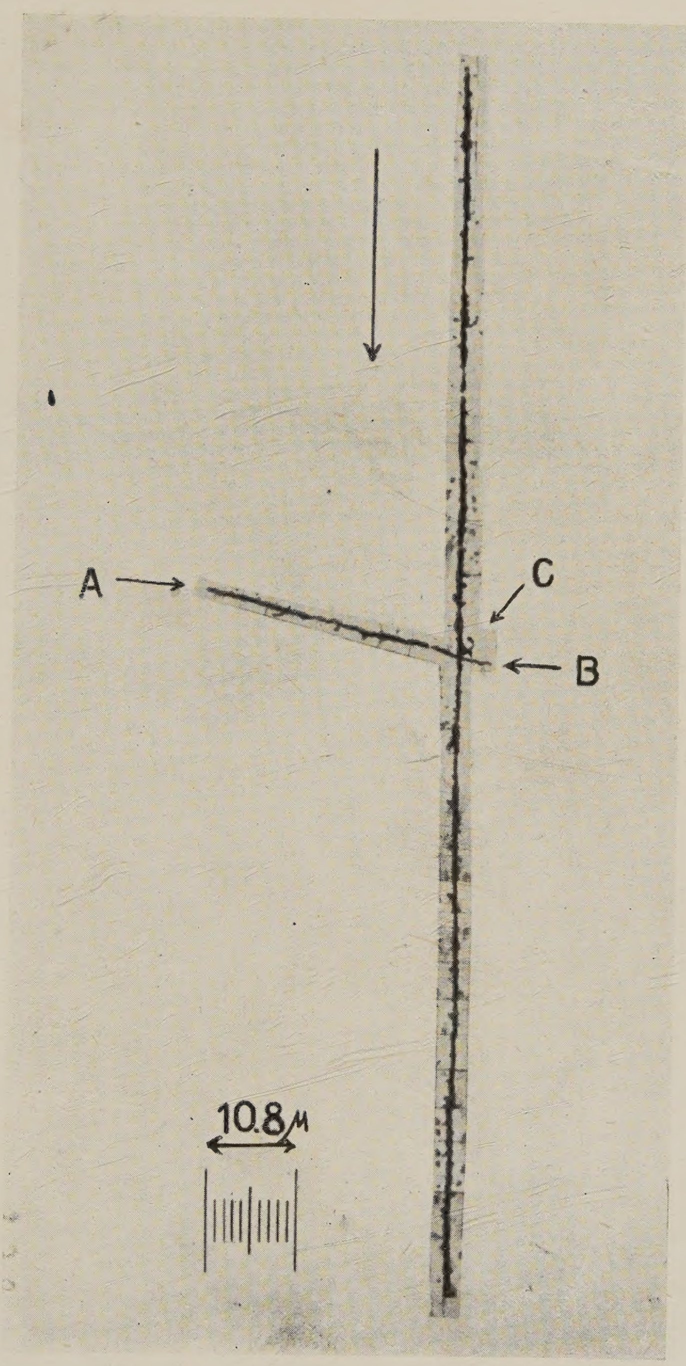


Fig. 5-*a*. – Interazione di un nucleo pesante primario con un nucleo dell'emulsione.

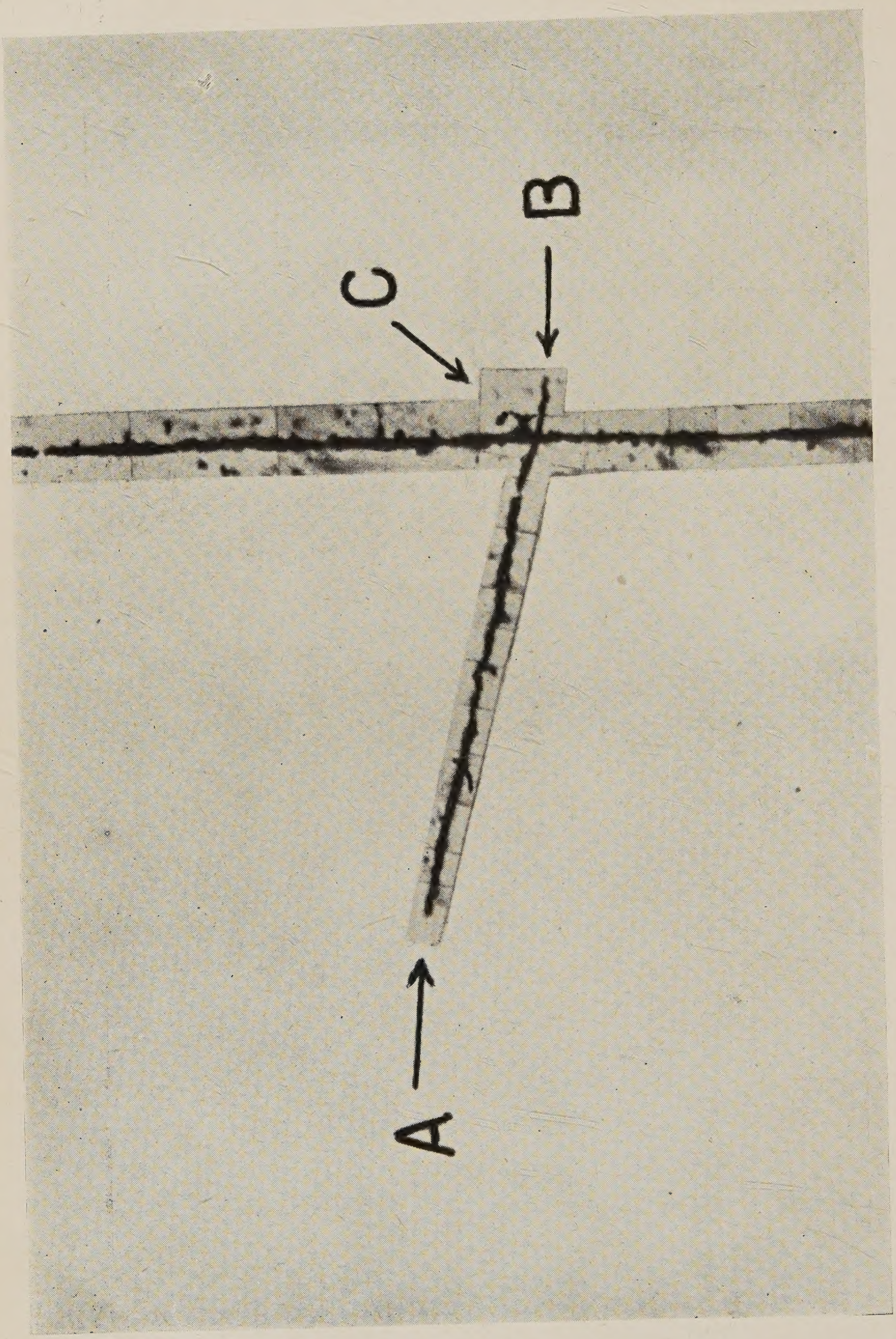


Fig. 5-*b*. – Dettaglio della fig. 5-*a*.

2) presentano una distribuzione angolare non isotropa a 29000 m s.l.d.m.;

3) presentano in diversi casi numero atomico superiore a quello degli atomi della atmosfera terrestre;

4) il rapporto

$$\frac{\text{flusso dei nuclei pesanti con } Z > 8}{\text{flusso dei protoni primari}}$$

non è incompatibile con quello

$$\frac{\text{frequenza degli atomi con } Z > 8}{\text{frequenza degli atomi di H}}$$

relativo alla materia stellare ed interstellare.

7. – Discussione di due eventi particolari.

Oltre alle tracce dei nuclei pesanti, dei quali abbiamo già parlato, abbiamo osservato la traccia di un nucleo pesante 8_{13} che attraversa otto lastre e che presenta una variazione del numero dei raggi $\delta/100\ \mu$ in senso inverso a quella che dovrebbe presentare un nucleo pesante primario.

TABELLA II.

Lastre attraversate dal nucleo pesante 8_{13}	Numero di raggi $\delta/100\ \mu$ nelle varie lastre
1	18,4 $\pm$ 2
2	15,3 $\pm$ 1,95
3	10,3 $\pm$ 1,63
4	9,52 $\pm$ 1,56
5	7,72 $\pm$ 1,41
6	8,24 $\pm$ 1,46
7	6,54 $\pm$ 1,33
8	5,14 $\pm$ 1,16

In tab. II sono riportati il numero dei raggi $\delta/100\ \mu$ per i vari tratti della traccia del nucleo pesante 8_{13}. Se il nucleo pesante avesse attraversato le lastre nel senso 1, 2,... 8, il numero dei raggi $\delta/100\ \mu$ avrebbe dovuto aumentare passando dalla lastra 1 alla lastra 8, invece — come si vede dalla tab. II — il numero dei raggi $\delta/100\ \mu$ diminuisce fuori dagli errori statistici. Per spiegare l'andamento dei raggi δ in tale traccia si possono fare due ipotesi:

1) Si può supporre che il nucleo pesante faccia parte della radiazione cosmica primaria e che nell'attraversare il vetro fra le emulsioni 2 e 3, si sia parzialmente disintegrato. Tale ipotesi è stata fatta perchè, come si vede dalla tab. II, i raggi $\delta/100\ \mu$ diminuiscono parecchio, fuori dagli errori, quando si passa dalla lastra 2 alla lastra 3, mentre per nessun'altra coppia di tratti successivi si ha una variazione così forte. Dai valori riportati nella prima parte della tab. III si vede che il numero atomico Z_m, calcolato coi valori relativi ai vari tratti della traccia, varia da 20 ad 11 quando si passa dalla coppia di lastre 1-2 alla coppia di lastre 3-4, mentre resta costante passando dalla coppia 3-4 alla coppia 5-6. Si potrebbe perciò supporre che un nucleo pesante primario con numero atomico $Z_m = 20$ si sia disintegrato nel vetro fra le lastre 2 e 3, dando origine a un nucleo pesante con un numero atomico $Z_m = 11$ e, probabilmente, anche a particelle relativistiche non registrabili colle nostre lastre. Disintegrazioni simili sono state osservate da BRADT e PETERS [9].

2) Si può supporre che il nucleo pesante 8_{13}, provenendo dal basso, abbia attraversato le lastre nel senso 8-7... 1. Tale ipotesi è stata fatta perchè, andando dalla lastra 8 verso la 1, si vede un aumento continuo nel numero deì raggi $\delta/100\ \mu$; questa variazione è entro gli errori statistici se si prendono due tratti successivi, ma è fuori degli errori se si prendono due tratti non successivi. L'aumento più forte, che si nota passando dalla lastra 3 alla lastra 2 (fra le quali il nucleo pesante attraversa 2,87 g cm^{-2} di vetro) e dalla lastra 2 alla lastra 1, può spiegarsi supponendo che il nucleo pesante si avvicini alla fine del suo percorso acquistando un maggiore potere ionizzante. Nella seconda parte della tab. III la traccia 8_{13} è stata considerata come proveniente dalla lastra 8. I numeri atomici minimi determinati in base ai valori relativi ai diversi tratti, sono costanti; l'energia minima per nucleone non è inferiore a quella posseduta, dagli altri nuclei pesanti. Se il nucleo pesante 8_{13} proviene dal basso, esso deve avere avuto origine in una disintegrazione nucleare; dovrebbe quindi farsi l'ipotesi che esistono disintegrazioni nucleari nelle quali vengono emessi frammenti con energia per nucleone molto maggiore dell'energia di legame. BLAU, BLOCK e NAFE [10] in lastre esposte alla stessa latitudine e alla stessa altezza delle nostre, hanno osservato una stella che emette diversi frammenti nucleari, uno dei quali ha un numero atomico $Z = 6$ ed un'energia per nucleone circa sei volte minore di quella del nucleo pesante 8_{13}. Ma non crediamo che tale evento possa ritenersi una conferma dell'ipotesi che il nucleo pesante 8_{13} sia stato emesso in una disintegrazione nucleare, dato che tale nucleo ha non solo una energia per nucleone maggiore, ma anche un numero atomico più elevato.

---

(9) H. L. BRADT e B. PETERS: *Phys. Rev.*, **75**, 1779 (1949).
(10) M. BLAU, M. M. BLOCK e J. E. NAFE: *Phys. Rev.*, **76**, 860 (1949).

TABELLA III.

Coppie di lastre attraversate dal nucleo pesante 8_{13}		Raggi $\delta/100\ \mu$ nelle varie coppie di lastre	R_m = percorso minimo residuo relativo ai vari tratti in g cm^{-2}	Z_m = valore minimo del numero atomico	E_m = energia minima relativa ai vari tratti della traccia in GeV	$E_m/2Z$ = energia minima per nucleone nel primo tratto della traccia in GeV	Angolo zenitale in gradi
I	1–2	16,9 ± 1,44	9,52	20	14,9	0,37	40°
	3–4	9,91 ± 1,13	6,41	11	4,7	—	—
	5–6	7,97 ± 1,02	3,2	10	2,98	—	—
	7–8	5,83 ± 0,88	0	—	—	—	—
II	8–7	5,83 ± 0,88	9,52	11	5,7	0,26	140°
	6–5	7,97 ± 1,02	6,41	12	—	—	—
	4–3	9,91 ± 1,13	3,2	11	—	—	—
	2–1	16,9 ± 1,44	0	—	—	—	—

TABELLA IV.

Nucleo pesante 6_1	Raggi $\delta/100\ \mu$ nei vari tratti della traccia	Percorso minimo nei vari tratti in g cm^{-2}	Z_m = valore minimo del numero atomico	Z_M = valore massimo del numero atomico	E_m = energia minima nei vari tratti in GeV	E_{mA} = energia minima all'entrata dell'atmosfera in GeV
Prima dell'urto . . .	6,1 ± 1,43	3,90	8	18	2,68	6,4
Dopo l'urto: I tratto	3,06 ± 1,25	3,82	5	14	1,95	—
Dopo l'urto: II tratto	4,87 ± 1,02	2,01	6	16	—	—

Un altro dei nuclei pesanti osservati nelle nostre lastre, il 6_1, interagendo con un nucleo dell'emulsione fotografica, ha dato origine all'evento mostrato in fig. 5. Le tracce A e B terminano nell'emulsione ma, essendo molto corte, non si possono attribuire con certezza a particelle α. La traccia C è attribuibile a un elettrone lento. Abbiamo calcolato lo Z del nucleo pesante prima e dopo l'urto; i risultati sono riportati nella tab. IV; lo Z del nucleo pesante dopo l'urto è stato calcolato per due tratti diversi della traccia.

L'evento osservato si può interpretare come dovuto ad un urto « distante » fra un nucleo pesante con numero atomico compreso fra 8 e 18, ed un atomo dell'emulsione. Dopo l'urto il nucleo pesante prosegue senza subire alcuna deflessione nè una perdita di carica notevole. Un evento simile, osservato da SALANT e da HORNBOSTEL, è riportato da BRADT e PETERS in ([4]).

Ringraziamo molto i proff. G. e V. COCCONI per averci inviato le lastre e per i consigli datici.

SUMMARY

In photographic plates for nuclear research, exposed at 29000 m above sea level, tracks produced by heavy nuclei with atomic number $Z > 2$ have been observed. For 35 of the observed nuclei the atomic number, the minimum of the energy in the stack of plates, the minimum of the energy per nucleon on entering the atmosphere have been calculated. The distribution of the flux of the heavy nuclei versus zenith angle and the distribution of the heavy nuclei versus atomic number have been plotted. It seems evident that these heavy nuclei are a component of the primary cosmic radiation. Two particular events are discussed: 1) the partial disintegration of a heavy nucleus in the glass between two emulsions; 2) the nuclear collision of a heavy nucleus with a nucleus of the emulsion.

IL NUOVO CIMENTO Vol. VII, N. 4 2 Luglio 1950

Contributo allo studio degli sciami estesi.

I.

E. Amaldi, C. Castagnoli, A. Gigli (*) e S. Sciuti

Istituto di Fisica dell'Università, Centro di studio per la Fisica Nucleare del C.N.R., Roma

(ricevuto il 20 Aprile 1950)

Riassunto. — Scopo del presente lavoro è quello di mettere in evidenza una differenza fra la struttura degli sciami estesi quale risulta dallo studio sperimentale della sua componente elettronica e le previsioni basate sulla teoria a cascata elettronica. L'esistenza di una simile discrepanza è suggerita chiaramente dalla presenza di mesoni e nucleoni negli sciami estesi. A tale scopo è stato costruito un dispositivo comprendente 4 camere di ionizzazione e 4 mazzi di contatori in coincidenza, nel quale si sfrutta la moltiplicazione che la componente elettronica dello sciame subisce in uno strato di Pb (di 2,5 o 5 cm di spessore) che contorna le camere medesime. Vengono esposti i risultati di misure preliminari eseguite con tale dispositivo e questi vengono confrontati con i risultati di calcoli svolti supponendo che la distribuzione spaziale degli elettroni e dei fotoni di una ben determinata energia sia rappresentata da una legge gaussiana modificata rispetto a quella impiegata da altri autori. In seguito ad una discussione di tale rappresentazione in confronto di altre più accurate si conclude che la discrepanza, per altro non forte a causa di notevoli errori di misura, tra i risultati sperimentali e la teoria sembra dovuta alla effettiva struttura dello sciame.

(*) Assistente presso l'Istituto di Fisica dell'Università di Pavia, momentaneamente presso il Centro di studio per la Fisica Nucleare con una borsa di studio del C.N.R.

1. – Introduzione.

La maggior parte delle esperienze eseguite fino ad oggi sugli sciami estesi si può dividere, grosso modo, in due gruppi: al primo appartengono le esperienze riguardanti la componente elettronica, mentre le seconde si riferiscono alle particelle di altra natura, mesoni e nucleoni, che sono presenti nello sciame in percentuali non molto elevate.

Le esperienze del primo gruppo si riferiscono per la quasi totalità alla estensione laterale dello sciame, alla densità delle particelle, ecc., e i loro risultati sembrano, genericamente parlando, accordarsi abbastanza bene con le previsioni della teoria a cascata elettronica in cui lo sciame ha origine nell'alta atmosfera da un solo elettrone di elevata energia.

Mentre tutte le esperienze di questo tipo, eseguite per il passato, fornivano risultati mediati su tutte le possibili distanze dall'asse e su tutte le energie totali dello sciame, più recentemente sono state eseguite da WILLIAMS (1) e da COCCONI, TONGIORGI e GREISEN (2) alcune misure in cui si determina, sciame per sciame, la densità delle particelle elettroniche a diverse distanze dall'asse. Anche i risultati di tali esperienze, le quali evidentemente si prestano ad un confronto assai più severo delle precedenti con le previsioni della teoria a cascata, sembrano confermare pienamente la distribuzione di densità della componente elettronica calcolata da MOLIÈRE (3).

In conclusione, si può dire che tutte le esperienze eseguite fino ad oggi sulla componente elettronica degli sciami estesi sono in discreto accordo, o per lo meno non in aperto disaccordo, con la teoria a cascata elettronica.

Le esperienze del secondo gruppo invece ci rivelano un aspetto essenziale degli sciami estesi, il quale esorbita completamente dalla teoria a cascata elettronica. È chiaro infatti che per comprendere quale sia la struttura degli sciami estesi è necessario chiarire i rapporti genetici che intercorrono fra la componente elettronica e i nucleoni e i mesoni presenti negli sciami estesi.

A ciò si aggiunga che la componente primaria della radiazione cosmica sembra essere costituita per la sua totalità o quasi da protoni ed altri nuclei leggeri mentre per spiegare con la teoria a cascata elettronica la frequenza degli sciami estesi quale si osserva sperimentalmente è necessario ammettere che la primaria sia costituita tutta, o quasi, da elettroni.

---

(1) R. W. WILLIAMS: *Phys. Rev.*, **74**, 1689 (1948). Per una dettagliata discussione di questo lavoro vedi J. M. BLATT: *Phys. Rev.*, **75**, 1584 (1949).

(2) G. COCCONI, V. COCCONI-TONGIORGI e K. GREISEN: *Phys. Rev.*, **76**, 1020 (1949).

(3) G. MOLIÈRE: *Kosmische Strahlung* (ed. da W. Heisemberg, Springer Verlag, Berlino, 1943), cap. 3; oppure: *Cosmic Radiation* (ed. da W. Heisemberg, Dover Publication, New York, 1946), cap. 3. Vedi anche *Phys. Rev.*, **77**, 715 (1950).

Sembra ragionevole pensare che tale contraddizione fra i risultati dei due gruppi di esperienze sia dovuta al fatto che le esperienze eseguite fino ad oggi sulla componente elettronica degli sciami estesi siano poco sensibili alla loro struttura. Come già si è detto, esse si riferiscono quasi tutte esclusivamente alla densità superficiale delle particelle la cui dipendenza dalla distanza r dall'asse dello sciame è determinata da leggi di tipo molto generale come l'urto coulombiano.

Ci è quindi sembrato opportuno cercare di fare qualche esperienza sulla componente elettronica degli sciami estesi in cui intervengano in modo essenziale proprietà diverse dalla densità superficiale; tali sono, ad esempio, le proprietà moltiplicative degli elettroni che sono legate in modo noto e relativamente semplice alla loro energia.

I dati sperimentali, che esporremo nel n. 4 dopo aver descritto il dispositivo impiegato (n. 2) e aver spiegato qualitativamente il principio del metodo impiegato (n. 3), sono affetti da errori statistici assai rilevanti. Essi sono però sufficientemente precisi per un confronto con i risultati dei calcoli (n. 5), anch'essi affetti da non poche incertezze come tutti i calcoli sulle cascate elettroniche; il nostro scopo infatti è quello di esplorare una nuova via nello studio degli sciami estesi per vedere se essa ponga in evidenza discrepanze nette fra teoria ed esperienza. Nel n. 6 ove discuteremo solo una parte dei nostri risultati sperimentali, rimandando l' esame degli altri ad un prossimo lavoro, mostreremo come anche per questa via non si riesca a stabilire una netta discordanza fra le previsioni della teoria a cascata e i risultati sperimentali.

In un primo tempo infatti avevamo trovato che i risultati teorici non si accordavano bene con quelli sperimentali [4]. Ciò era dovuto però in gran parte all'avere sopravalutato i raggi γ e sottovalutato la densità degli elettroni presenti negli sciami estesi in prossimità dell'asse dello sciame.

Una più accurata valutazione di queste grandezze ha ridotto assai notevolmente la discrepanza, tanto da non poter oggi affermare che i risultati sperimentali discussi nel presente lavoro siano di per sè incompatibili con la teoria a cascata elettronica.

Le misure sono state eseguite al Laboratorio della Testa Grigia (3 500 m s.l.m. $\bar{p} = 675$ g/cm^2). A tale quota l'unità di radiazione in aria (X_0=36 g/cm^2), in cui verranno nel seguito espresse le lunghezze, risulta pari a 456 m. Le energie verranno espresse in unità di energia critica e precisamente quando scriviamo E o $y = \ln E$ intendiamo che l'energia è misurata in unità di energia critica nell'aria ($\varepsilon_a = 89$ MeV), quando scriviamo E_{Pb} o $y_{\mathrm{Pb}} = \ln E_{\mathrm{Pb}}$ intendiamo che l'energia è misurata in unità di energia critica del Pb ($\varepsilon_{\mathrm{Pb}}$=6,9 MeV).

---

[4] Comunicazione al Congresso di Como, Settembre 1949.

2. – Il dispositivo sperimentale.

Il dispositivo sperimentale impiegato è rappresentato schematicamente nella fig. 1.

1, 2, 3, 4, sono quattro camere di ionizzazione cilindriche simili a quelle impiegate da ROSSI e collaboratori (5) e da WILLIAMS (1) (lunghezza utile 92 cm, diametro esterno 8 cm, spessore della parete 1 mm di ottone) riempite con argon puro a 4,65 atmosfere, le quali sono connesse attraverso 4 amplificatori proporzionali a quattro oscillografi comandati da un sistema per l'osservazione autosincrona degli impulsi delle camere medesime (5) (6). Il sincroscopio entra in funzione, e una macchina fotografica fotografa i 4 oscillografi, tutte le volte che in almeno una delle 4 camere di ionizzazione vi è un impulso di ampiezza superiore ad 1,2 V_α intendendo con V_α l'ampiezza degli impulsi forniti da 4 deboli preparati di Polonio inseriti permanentemente entro le camere di ionizzazione ($E_{\alpha\mathrm{Po}} = 5{,}3$ MeV). Ciascuno dei tre mazzi di contatori a, b, c, è costituito da 4 contatori di 4 cm di diametro e circa 60 cm di lunghezza utile, in modo da avere complessivamente una area totale $S = 930$ cm²; il contatore d ha un'area $s = 100$ cm².

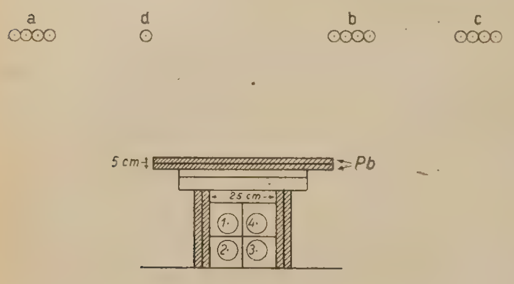


Fig. 1.

I tre mazzi di contatori a, b, c, sono ai vertici di un triangolo di 6 m di lato avente le camere di ionizzazione vicino al centro; anche il contatore d è situato vicino al centro di tale triangolo. Tutti i contatori sono situati in un piano orizzontale circa 1,5 m più in alto delle camere.

A mezzo di normali circuiti di coincidenza (potere risolutivo $6{,}5 \cdot 10^{-6}$ s) vengono registrate le coincidenze triple $a + b + c$ e le coincidenze quadruple $a + b + c + d$. Inoltre ogni volta che si ha una coincidenza tripla $a + b + c$ viene inviato un impulso al catodo dei 4 tubi oscillografici in maniera da interrompere per pochi microsecondi la eventuale traccia oscillografica dovuta ad un fiotto entro le camere di ionizzazione. Tale impulso viene convenientemente ritardato in modo da giungere all'oscillografo quando gli eventuali impulsi delle camere di ionizzazione sono già passati per il loro massimo. Un analogo sistema, munito di un diverso ritardo è connesso all'uscita delle quadruple.

---

(5) H. S. BRIDGE, W. E. HAZEN e B. ROSSI: *Phys. Rev.*, **74**, 1083, (1948).

(6) F. LEPRI, I. F. QUERCIA e B. RISPOLI: *Nuovo Cimento*, **5**, 569 (1949).

In tal modo dall'esame dei fotogrammi è possibile riconoscere quali sono accompagnati da una coincidenza tripla $a + b + c$, quali da una coincidenza quadrupla $a + b + c + d$ e quali no. Nella fig. 2 diamo un esempio di coincidenza fra le quattro camere di ionizzazione e i contatori $a + b + c + d$.

Fig. 2.

Le quattro camere di ionizzazione sono separate fra loro da uno strato di Pb di 2 mm di spessore e rinchiuse in una scatola di alluminio, avente le funzioni di uno schermo elettrostatico, dello spessore di 2 mm.

All'esterno di tale scatola di alluminio è possibile disporre tutto attorno alle camere di ionizzazione uno strato di Pb come è indicato nella fig. 1. Le misure venivano eseguite senza Pb, con uno strato di Pb di 2,5 cm di spessore e con uno strato di Pb di 5 cm di spessore.

3. – Descrizione qualitativa del funzionamento del dispositivo.

Dato che la quasi totalità degli sciami estesi proviene da direzioni che formano con la verticale un angolo inferiore o al massimo uguale a 30°, noi ammetteremo d'ora in poi che gli sciami incidano sull'apparecchio tutti in direzione verticale.

Se il fiotto di ionizzazione registrato da una camera è dovuto a un gran numero di particelle poco ionizzanti distribuite uniformemente sull'area della camera medesima, è facile dedurre una semplice relazione fra l'ampiezza dell'impulso e la densità superficiale delle particelle incidenti. In tale relazione figura naturalmente la perdita di energia per ionizzazione delle particelle incidenti entro il gas della camera, la quale, a rigore, è una funzione lentamente variabile dell'energia. Osservando che la maggior parte delle particelle appartenenti ad uno sciame esteso ha una energia prossima all'energia critica (in aria $\varepsilon_a = 89$ MeV, in Pb $\varepsilon_{Pb} = 6{,}9$ MeV) del mezzo immediatamente sovrastante la camera (purchè di spessore sufficiente) ed applicando la relazione di WILLIAMS [1]

$$(1) \qquad \Delta = 5{,}3 \cdot 10^6 \, \frac{1}{fjW_0\delta vF} \cdot \frac{V}{V_\alpha} \, ,$$

dove:

j = numero delle coppie di ioni prodotte per g/cm²
W_0 = energia per produrre una coppia di ioni
δ = densità del gas della camera
v = volume utile della camera
f = fattore di riduzione dovuto alla distribuzione uniforme della ionizzazione nella camera
F = fattore di moltiplicazione nelle pareti della camera

si ottiene

$$(2) \text{ in aria} \qquad \Delta = 7{,}2 \cdot 10^2 \, \frac{V}{V_\alpha} \quad \text{particelle/m}^2 \, ,$$

$$(3) \text{ sotto Pb} \qquad \Delta = 9{,}2 \cdot 10^2 \, \frac{V}{V_\alpha} \quad \text{particelle/m}^2 \, ;$$

Δ è la densità superficiale delle particelle e V/V_α il rapporto delle ampiezze degli impulsi dovuti rispettivamente al fiotto considerato e ad una particella α del Po di taratura; i valori numerici delle costanti sono:

$$jW_0 = 2{,}1 \cdot 10^6 \text{ eV/g/cm}^2 \text{ in aria} \, ; \qquad jW_0 = 1{,}55 \cdot 10^6 \text{ eV/g/cm}^2 \text{ sotto Pb} \, ;$$

$$f = 0{,}90 \, ; \quad \delta = 7{,}9 \cdot 10^{-3} \text{ g/cm}^3 \, ; \quad v = 4{,}4 \cdot 10^3 \text{ cm}^3 \, ; \quad F = 1{,}12 \, .$$

Nelle condizioni effettivamente impiegate nella esperienza, si registrano

solo fiotti per cui $V/V_a \geqslant 1{,}2$ per modo che si può senz'altro dire che le nostre misure si riferiscono a sciami aventi, localmente sulle camere di ionizzazione, densità dell'ordine o superiori a 1000 particelle/m².

Notiamo inoltre che le coincidenze triple $a + b + c$ selezionano sciami di densità superficiale dell'ordine o superiori a circa 30 particelle/m² e le coincidenze quadruple, sciami di densità superficiale dell'ordine o superiori a circa 300 particelle/m².

Passando ora a discutere qualitativamente il funzionamento del dispositivo della fig. 1 è necessario distinguere il caso in cui le camere di ionizzazione sono scoperte dal caso in cui esse sono contornate da Pb.

Nel primo caso è chiaro che tutte le volte che uno sciame esteso è registrato dalle camere di ionizzazione, esso è accompagnato anche da una coincidenza tripla e una quadrupla in quanto la probabilità che uno sciame avente una densità di 1000 particelle/m² non agisca sui vari contatori è trascurabile.

Nel caso invece in cui al di sopra delle camere ci sia uno strato di Pb e si considerino, per esempio, soltanto impulsi corrispondenti a 1500 particelle per m^{-2}, si avrà una coincidenza fra i contatori e le camere tutte le volte che nell'aria la densità è sufficiente per azionare i contatori ossia 30-300 particelle/m² e la moltiplicazione subita in media dalle particelle dello sciame nello strato di Pb è dell'ordine di 50-5; naturalmente più elevata è la densità delle particelle nell'aria e più piccolo è il fattore di moltiplicazione medio necessario per avere la voluta densità sotto piombo.

Per avere un'idea degli ordini di grandezza, ricordiamo che secondo le tabelle di BHABHA e CHAKRABARTY (7) con uno strato di Pb di 2,5 cm di spessore (dato che l'unità di radiazione X_0, in Pb, vale 5,9 g/cm² si ha 2,5 cm Pb $\rightarrow 28{,}2/5{,}9 = 4{,}8\ X_0$) si ha un fattore di moltiplicazione pari a 5 per

$$y_{\text{Pb}} = 4\,, \qquad y = 1{,}45\,, \qquad E = 4{,}25 \cong 4 \cdot 10^8 \text{ eV}\,,$$

pari a 50 per

$$y_{\text{Pb}} = 6{,}4\,, \qquad y = 3{,}85\,, \qquad E = 47 \cong 4 \cdot 10^9 \text{ eV}\,,$$

con uno spessore di Pb di 5 cm ($\rightarrow 9{,}6\ X_0$) si hanno gli stessi fattori di moltiplicazione per

$$y_{\text{Pb}} = 5{,}2\,, \qquad y = 2{,}65\,, \qquad E = 14{,}1 \cong 1{,}3 \cdot 10^9 \text{ eV}\,,$$

$$y_{\text{Pb}} = 6{,}9\,, \qquad y = 4{,}35\,, \qquad E = 77{,}5 \cong 6{,}9 \cdot 10^9 \text{ eV}\,.$$

Come è noto, la estensione laterale dello sciame è determinata dagli urti coulombiani i quali allontanano dall'asse gli elettroni di bassa energia per modo tale che, come vedremo meglio nel n. 5, si può scrivere una relazione

---

(7) H. J. BHABHA e S. K. CHAKRABARTY: *Phys. Rev.*, **74**, 1352 (1948).

di proporzionalità inversa fra la distanza r dall'asse e la massima energia degli elettroni a quella distanza. Tale relazione è

$$r \cong \frac{0{,}245}{E}\,, \tag{4}$$

la quale, applicata ai valori di E dati precedentemente, ci dice che sotto 2,5 cm di Pb si può avere un fattore di moltiplicazione pari a 5 e rispettivamente 50 soltanto per distanze inferiori rispettivamente a

$$5{,}76 \cdot 10^{-2}\, X_0 \cong 26 \text{ m} \quad \text{e} \quad 5{,}21 \cdot 10^{-3}\, X_0 \cong 2{,}4 \text{ m}\,,$$

sotto 5 cm di Pb

$$1{,}74 \cdot 10^{-2}\, X_0 \cong 8 \text{ m} \quad \text{e} \quad 3{,}16 \cdot 10^{-3}\, X_0 \cong 1{,}4 \text{ m}\,.$$

Dato poi che anche a queste distanze dall'asse la stragrande maggioranza degli elettroni è dotata di energie inferiori a quella indicata, affinchè il fattore di moltiplicazione nel Pb, mediato su tutto lo spettro delle particelle incidenti sulla camera, abbia il valore prefissato, è necessario andare a distanze dall'asse ancora inferiori a quelle indicate.

Dato poi che la frequenza con cui incidono gli sciami sull'apparecchio è tanto maggiore quanto minore è il numero di particelle che lo compongono, accadrà spesso, con le camere sotto Pb, che queste rivelino la parte centrale di sciami estesi che nell'aria sono così poveri di particelle da non azionare i contatori in quanto le poche particelle incidenti sul Pb hanno energie così elevate da moltiplicarsi fortemente.

In conclusione la frequenza delle coincidenze fra le 4 camere di ionizzazione *non* in coincidenza con i contatori rappresenta la somma delle frequenze di due tipi di eventi: 1) eventi locali (non facenti parte di sciami estesi) in cui una o pochissime particelle incidenti sul Pb danno luogo a processi moltiplicativi così notevoli da produrre sotto Pb un elevato numero di particelle ionizzanti; 2) sciami estesi aventi localmente densità superficiali bassissime ma contenenti particelle molto energiche; ossia nell'ipotesi che lo sciame esteso sia interpretabile con la teoria a cascata elettronica, sciami estesi di bassa densità aventi l'asse che passa nella immediata vicinanza delle camere.

Gli eventi in cui le 4 camere oltre ad essere in coincidenza fra loro sono in coincidenza con i contatori sono invece sciami estesi che già nell'aria hanno una densità sufficiente ma che contengono particelle abbastanza veloci. Come vedremo meglio nel seguito, nell'ipotesi che lo sciame sia rappresentabile con una cascata elettronica, ciò accade prevalentemente per sciami il cui asse passa a distanze dalle camere dell'ordine di 10^{-3}–$10^{-2}\, X_0$ (0,5 – 5 m).

Un'altra osservazione di carattere qualitativo sul dispositivo della fig. 1 è che, una volta ammesso che gli sciami estesi incidano sull'apparecchio tutti in direzione verticale, l'ampiezza dell'impulso dovuto ad un determinato sciame

nelle due camere superiori (1-4) è in generale diverso da quello registrato dalle camere inferiori (2-3): queste infatti sono separate dalle precedenti da 2 mm di ottone (1,7 g/cm² : 13,3 g/cm² = 0,128 X_0) e 2 mm di Pb (2,26 g/cm² : 5,9 g/cm² = 0,383 X_0) ossia da uno spessore di materiale corrispondente complessivamente a 0,5 X_0.

Il rapporto tra le medie delle ampiezze degli impulsi nelle due camere inferiori e nelle due superiori ci darà la moltiplicazione subita in media dalle particelle dello sciame nell'attraversare tale strato. Se le camere sono scoperte, tale rapporto sarà sempre maggiore di 1; se le camere sono coperte da uno strato di Pb, tale rapporto sarà in generale minore di 1 salvo che tra le particelle incidenti vi siano alcuni elettroni di energia così elevata che il massimo della corrispondente curva di moltiplicazione si abbia a uno spessore maggiore di quello sovrapposto alle camere. Con uno strato di Pb di 2,5 cm di spessore ciò accade soltanto per

$$y \geqslant 5{,}0 \qquad \text{ossia} \qquad E \geqslant 1{,}5 \cdot 10^2 \cong 1{,}3 \cdot 10^{10}\ \text{eV}\,,$$

per uno spessore di 5 cm di Pb soltanto per

$$y \geqslant 6{,}5 \qquad \text{ossia} \qquad E \geqslant 6{,}6 \cdot 10^2 \cong 5{,}7 \cdot 10^{10}\ \text{eV}\,.$$

Applicando ancora una volta la (4) a queste energie, si trova che ciò può verificarsi soltanto a distanze dell'asse piccolissime: per 2,5 cm di Pb

$$r \cong \frac{0{,}245}{1{,}5 \cdot 10^2} = 1{,}6 \cdot 10^{-3}\, X_0 \cong 0{,}75\ \text{m}$$

per 5 cm di Pb

$$r \cong \frac{0{,}245}{6{,}6 \cdot 10^2} = 3{,}7 \cdot 10^{-4}\, X_0 \cong 0{,}17\ \text{m}$$

(a 3 500 m s.l.m.) ossia a distanze dall'asse inferiori alle dimensioni dell'apparecchio impiegato per la rivelazione dello sciame.

Nel discutere qualitativamente i risultati delle misure è quindi necessario tener presente che nelle vicinanze dell'asse dello sciame l'apparecchio da noi usato fa una media su di un'area relativamente estesa.

Nel presente lavoro noi discuteremo in dettaglio le frequenze delle coincidenze fra camere e contatori rimandando ad un prossimo lavoro (che nel seguito indicheremo con II) l'esame del rapporto delle ampiezze degli impulsi fra le camere inferiori 2-3 e quelle superiori 1-4.

4. – I risultati sperimentali.

Le misure venivano eseguite alternando gli spessori di Pb 0, 2,5 e 5 cm ogni due ore avendo cura di fare consecutivamente una serie intera di misure.

I tempi totali di misura sono stati i seguenti: 41,18 h con 0 cm Pb; 33,30 h con 2,5 cm Pb; 30,35 h con 5 cm Pb.

I tipi di eventi registrati sono i seguenti:

impulsi	in	1 camera	non	in coincidenza	con	i	contatori	(singole: S)
»	»	2 camere	»	»	»	»		(doppie: D)
»	»	3	»	»	»	»	»	(triple: T)
»	»	4	»	»	»	»	»	(quadruple: Q)

coincidenze triple dei contatori $a + b + c$ (3);
coincidenze quadruple dei contatori $a + b + c + d$ (4).

Il discriminatore del sincroscopio imponeva che in ogni evento registrato dalle 4 camere ci fosse almeno un impulso di ampiezza $\geqslant 1{,}2\ V_a$.

Con il dispositivo descritto nel n. 2 era possibile riconoscere le coincidenze tra gli eventi del tipo 3 o 4 e uno qualunque degli eventi S, D, T, Q. In tutte le nostre misure le uniche coincidenze osservate fra i contatori e le camere sono state del tipo

$$Q + 3 \quad \text{e} \quad Q + 4$$

salvo un unico evento del tipo $T + 3$.

Dato il tipo di registrazione fotografica di questi eventi è chiaro che $Q + 3$ significa una coincidenza quadrupla tra le 4 camere accompagnata da una coincidenza $a + b + c$ (e non $a + b + c + d$) fra i contatori; $Q + 4$ significa invece una coincidenza fra le 4 camere accompagnata da una coincidenza $a + b + c + d$ fra i contatori.

I risultati delle misure, espressi in numero di eventi all'ora sono riportati nella tabella I.

Per le singole che verranno discusse in altra sede e che qui riportiamo solo a titolo indicativo, è stata data la intensità per due diversi valori del taglio del discriminatore $V_{t,1} = 1{,}5\ V_a$; $V_{t,2} = 2{,}0\ V_a$.

I numeri di stelle qui riportati sono stati corretti per le variazioni barometriche. Tale correzione, eseguita assumendo un coefficiente di assorbimento in aria [8] pari a $1/138\ \text{cm}^2/\text{g}$ è stata applicata anche agli sciami estesi ossia agli eventi 3 e 4 [9] [10]. Nessuna correzione di questo tipo è stata invece apportata agli altri tipi di eventi. Dato il modo in cui le misure venivano alternate fra loro e dato l'elevato errore statistico da cui esse sono affette, l'aver trascurato questa correzione non ha certo alcuna influenza apprezzabile sui risultati finali.

Passiamo quindi alla discussione dei diversi tipi di eventi.

---

[8] B. Rossi: *Rev. Mod. Phys.*, **20**, 537 (1948).
[9] A. Daudin e J. Daudin: *Journ. de Phys. et de Rad.*, **8**, 10-394 (1949).
[10] C. Castagnoli, A. Gigli e S. Sciuti: *Nuovo Cimento* **7**, 307 (1950).

TABELLA I.

t	0		2,5 cm Pb		5 cm Pb	
	totale	$A \geqslant 105$ part/cam(*)	totale	$A \geqslant 105$ part/cam	totale	$A \geqslant 105$ part/cam
D	$2{,}42 \pm 0{,}24$ h^{-1}	—	$4{,}83 \pm 0{,}38$ h^{-1}	—	$3{,}36 \pm 0{,}34$ h^{-1}	—
T	$0{,}29 \pm 0{,}08$ h^{-1}	—	$2{,}20 \pm 0{,}26$ h^{-1}	—	$1{,}02 \pm 0{,}18$ h^{-1}	—
Q	$0{,}85 \pm 0{,}14$ h^{-1}	$0{,}22 \pm 0{,}07$ h^{-1}	$13{,}50 \pm 0{,}60$ h^{-1}	$4{,}25 \pm 0{,}36$ h^{-1}	$10{,}60 \pm 0{,}59$ h^{-1}	$3{,}66 \pm 0{,}35$ h^{-1}
$Q + 3$	$0{,}24 \pm 0{,}08$ h^{-1}	$0{,}04 \pm 0{,}03$ h^{-1}	$1{,}65 \pm 0{,}22$ h^{-1}	$1{,}08 \pm 0{,}18$ h^{-1}	$0{,}89 \pm 0{,}17$ h^{-1}	$0{,}36 \pm 0{,}11$ h^{-1}
$Q + 4$	$1{,}12 \pm 0{,}16$ h^{-1}	$0{,}19 \pm 0{,}06$ h^{-1}	$3{,}70 \pm 0{,}33$ h^{-1}	$2{,}10 \pm 0{,}25$ h^{-1}	$2{,}04 \pm 0{,}26$ h^{-1}	$1{,}35 \pm 0{,}21$ h^{-1}
S (**)	$2{,}26 \pm 0{,}05$ min^{-1}	$0{,}59 \pm 0{,}01$ min^{-1}	$2{,}20 \pm 0{,}05$ min^{-1}	$0{,}55 \pm 0{,}02$ min^{-1}	$2{,}02 \pm 0{,}04$ min^{-1}	$0{,}51 \pm 0{,}02$ min^{-1}
3	$4{,}08 \pm 0{,}01$ min^{-1}					
4	$0{,}801 \pm 0{,}005$ min^{-1}					

(*) Cioè $\Delta \geqslant$ 1500 part/m^2.

(**) I due valori delle S dati in ogni colonna corrispondono rispettivamente al taglio $V_{t,1} = 1{,}5\ V_a$ (cioè 99 part/camera) e $V_{t,2} = 2{,}0\ V_a$ (cioè 132 part/camera).

$Q+3$ e $Q+4$.

Questi eventi sono dovuti certamente a sciami estesi, le $Q+3$ in media a sciami di densità $\Delta \geqslant 30$ particelle/m², le $Q+4$ a sciami di densità $\Delta \geqslant 300$ particelle/m².

Salvo che non venga detto espressamente il contrario le nostre considerazioni si riferiscono a tutte le coincidenze fra camere e contatori senza distinguere tra $Q+3$ e $Q+4$.

Dato che si tratta di sciami estesi provenienti dall'alto, in direzione verticale o quasi, e dato che fra le camere vi è uno spessore di materiale corrispondente a 0,5 X_0 è naturale attendersi un diverso valore della media delle ampiezze degli impulsi nelle camere superiori (1-4) e nelle camere inferiori (2-3).

Questa circostanza va tenuta presente anche nel fare le statistiche delle misure, in quanto vengono registrati anche quegli eventi che pur avendo in entrambe le camere superiori un'ampiezza inferiore a 1,2 V_α subiscono nello straterello sottostante una moltiplicazione sufficiente da dare in almeno una delle camere inferiori, un impulso di ampiezza maggiore di 1,2 V_α^ζ.

Ne segue che le frequenze degli impulsi utili agli effetti delle statistiche, ossia di quegli eventi che nelle camere superiori hanno una densità

$$\Delta = 720 \cdot 1{,}2 = \;\; 860 \text{ particelle/m}^2 \text{ in aria },$$

$$\Delta = 920 \cdot 1{,}2 = 1100 \text{ particelle/m}^2 \text{ sotto Pb },$$

sono inferiori alle frequenze totali riportate nella tabella I in quanto queste si riferiscono a tutti gli eventi registrati. Le frequenze indicate in quella tabella con $A \geqslant 105$ particelle/camera corrispondenti a 1500 particelle/m² si riferiscono invece a quegli eventi che soddisfano questa condizione in almeno una od entrambe le camere superiori.

Abbiamo poi dedotto dai nostri dati sperimentali lo spettro integrale di densità ossia le frequenze $P_{Q+3}(\Delta) + P_{Q+4}(\Delta)$ degli eventi $(Q+3) + (Q+4)$ aventi densità superiore a un prefissato valore Δ. Tali risultati sono riportati in grafico doppiamente logaritmico nella fig. 3 ove i cerchietti neri si riferiscono alla densità mediata fra le due camere superiori $(\Delta_1 + \Delta_4)/2$, mentre i cerchietti vuoti si riferiscono alla densità nella camera 1 ossia a Δ_1; i risultati del resto analoghi, relativi alla camera 4 non sono stati riportati a solo scopo di semplicità.

Il buon accordo fra Δ_1, Δ_4 e $(\Delta_1 + \Delta_4)/2$ indica che le ampiezze degli impulsi nelle due camere superiori non sono in generale molto diversi fra loro.

Entro gli assai elevati errori statistici indicati nella fig. 3 noi potremo porre

$$P_{Q+3}(\Delta) + P_{Q+4}(\Delta) = \frac{K}{\Delta^\gamma} \quad \text{eventi}/h$$

e potremo determinare graficamente il valore di γ. La retta indicata nella fig. 3 corrisponde al valore di γ riportato nella tabella II ove è dato anche il

valore di K che si ottiene esprimendo Δ in particelle/m² e le P_{Q+3}, P_{Q+4} in eventi all'ora.

TABELLA II.

		2,5 cm Pb	5 cm Pb
$(Q+3)+(Q+4)$	γ K	1,30 $3{,}89 \cdot 10^4$	1,05 $3{,}48 \cdot 10^3$
Q	γ K	2,12 $2{,}19 \cdot 10^7$	2,00 $7{,}72 \cdot 10^6$

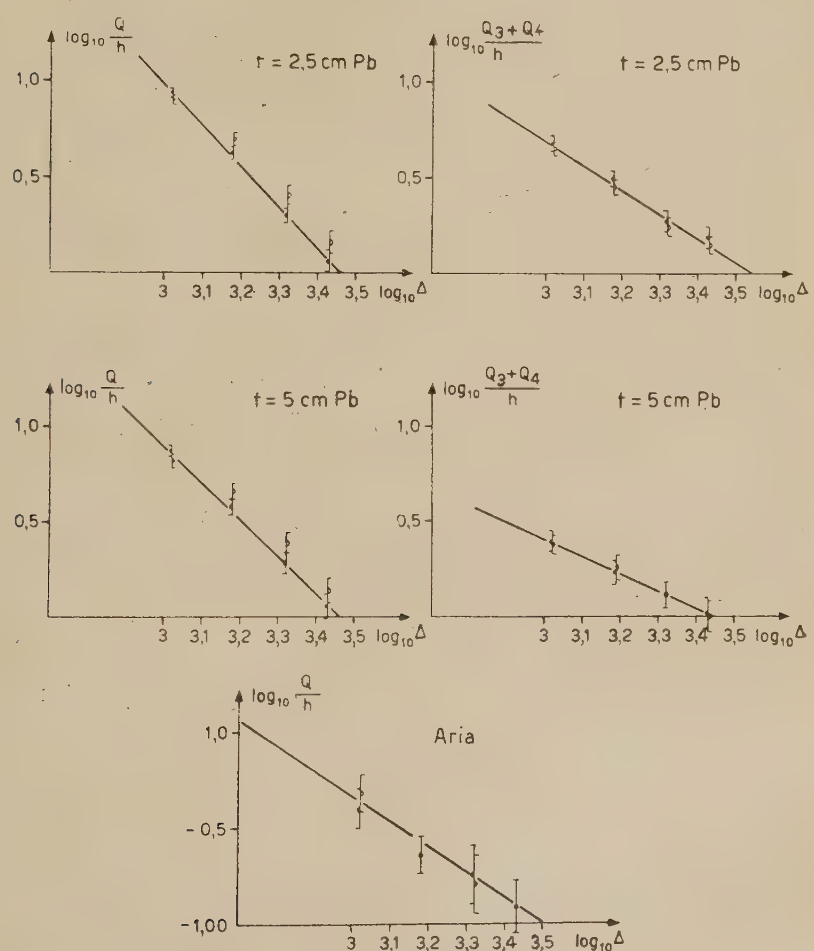


Fig. 3.

In tale tabella sono riportati solo i dati relativi alle misure sotto piombo e non quelli relativi alle camere in aria dato che per questi ultimi l'errore statistico era troppo grande per poterne dedurre un valore di γ. Nella fig. 3 la retta tracciata corrisponde a $\gamma = 1{,}46$, valore ottenuto da COCCONI e TONGIORGI [11] a 3 200 m s.l.m.

Q.

Questi eventi possono essere di due tipi:

a) eventi locali provocati da una singola particella carica o neutra incidente sulle camere;

b) sciami estesi molto radi che non azionano almeno uno dei mazzi dei contatori *a*, *b*, *c*.

Tutte le considerazioni fatte a proposito delle $Q+3$ e $Q+4$ si possono ora ripetere per le Q, e i risultati corrispondenti sono riprodotti nella fig. 3 e tabella II accanto a quelli relativi agli eventi $Q+3$ e $Q+4$.

C'è solo da notare che la frequenza degli eventi Q risulta sensibilmente diversa se si riporta in ascisse Δ_1, oppure $(\Delta_1 + \Delta_4)/2$, fatto questo che mostra che in generale le ampiezze degli impulsi nelle due camere contigue differiscono fra loro assai più che nel caso degli eventi del tipo $Q+3$ e $Q+4$. Questa circostanza verrà discussa in dettaglio nella parte II di questo lavoro.

T.

Questi eventi piuttosto rari sono probabilmente in gran parte disintegrazioni nucleari.

D.

Questi eventi sono prevalentemente disintegrazioni nucleari. Ci siamo limitati a fare la statistica del numero delle doppie corrispondenti a tutte le combinazioni delle quattro camere a due a due (tabella III). Da tale tabella si vede che questi eventi vengono prevalentemente in direzione verticale.

TABELLA III.

cm Pb / D (%)	0		2,5		5	
	totale	> 1 500 part/m²	totale	> 1 500 part/m²	totale	> 1 500 part/m²
1-2 o 4-3	59,4	53,6	71,6	63,3	73,5	67,8
1-4 o 2-3	34,8	40,7	23,4	30,2	21,6	28,6
1-3 o 4-2	5,8	5,7	5,0	6,5	4,9	3,6

(11) G. COCCONI e V. COCCONI-TONGIORGI: *Phys. Rev.*, **75**, 1058 (1949).

5. – Discussione quantitativa nell'ipotesi dello sciame esteso a cascata elettronica.

Allo scopo di calcolare la frequenza dei diversi eventi rivelati dal dispositivo sperimentale della fig. 1 è necessario conoscere la distribuzione spaziale ed energetica degli elettroni e dei quanti γ nello sciame. Queste sono state calcolate da MOLIÈRE (3) (12), il quale ha dedotto le funzioni di struttura per elettroni e fotoni di una ben determinata energia, per il caso di uno sciame nel massimo del suo sviluppo; il calcolo, di cui non sono ancora stati pubblicati i dettagli, è stato eseguito prendendo gli spettri totali degli elettroni e dei fotoni presenti nello sciame proporzionali ad $1/E^2$ (vedi formule (18) del n. 5, 2). Secondo questo autore la densità degli elettroni di una ben determinata energia si comporta nell'intorno dell'origine come $1/r^{1/3}$, mentre l'analoga grandezza relativa ai quanti γ si comporta come $1/r$. Le corrispondenti densità totali, ossia integrate su tutte le energie vanno invece entrambe come $1/r$.

Secondo recenti calcoli di NORDHEIM, OSBORNE e BLATT (13), le curve di distribuzione di Molière danno dei valori dei momenti di ordine superiore al secondo più piccoli di quelli che essi deducono con un procedimento diretto senza passare per la legge di distribuzione. Ossia secondo questi autori le curve di densità parziale date da MOLIÈRE avrebbero troppo poca coda.

I risultati di MOLIÈRE non si prestano però per calcoli del tipo di quelli che noi ci proponiamo di fare in quanto, a parte la non comoda forma analitica della densità degli elettroni, gli spettri sia di questi che dei fotoni si estendono fino all'infinito: fatto questo che li rende inutilizzabili per calcoli sotto strati di materiale di elevato numero atomico come il Pb entro i quali gli elettroni di alta energia subiscono una forte moltiplicazione prima di giungere alle camere di ionizzazione.

In altre parole, in un problema come quello che ci proponiamo di trattare è essenziale tener conto del valore finito della energia dell'elettrone primario che genera lo sciame; notiamo inoltre fin d'ora che per il tipo di eventi che qui vengono discussi ha importanza solo la parte dello sciame esteso che non è troppo lontana dall'asse ($r < 0{,}2$).

Un altro tipo di distribuzione che è stato impiegato da vari autori (14) (15) (16) si ottiene ammettendo che la densità degli elettroni o dei fotoni di una ben

(12) G. MOLIÈRE: *Zeits. f. Phys.*, **125**, 250 (1949).

(13) L. W. NORDHEIM, L. OSBORNE e J. M. BLATT: *Proc. Echo Lake Cosmic Ray Simposium*, 1949. (Abbiamo avuto notizia di questo lavoro solo dopo che il nostro lavoro era terminato).

(14) H. EULER: *Zeits. f. Phys.*, **113**, 73 (1949).

(15) L. WOLFENSTEIN: *Phys. Rev.*, **67**, 238 (1945).

(16) L. JANOSSY: *Cosmic Rays* (Clarendon Press, Oxford, 1948), pag. 324.

determinata energia sia rappresentabile con una legge gaussiana avente il giusto valore dello scarto quadratico medio. Tale legge presenta l'inconveniente di dar luogo ad una densità parziale finita per $r = 0$, mentre secondo MOLIÈRE essa deve divergere come $1/r^{1/3}$ o come $1/r$ a secondo che si tratti di elettroni o fotoni. Un'altra proprietà di tale legge è che i suoi momenti di ordine superiore al secondo risultano ancora minori di quelli di MOLIÈRE.

Noi abbiamo quindi cercato di procurarci una legge di distribuzione la quale unisse il pregio della semplicità, caratteristico della « densità » gaussiana, (e grazie al quale è facile tener conto del valore finito della energia dei primari), con una concentrazione di particelle nelle immediate vicinanze dell'asse almeno altrettanto pronunciata quanto segue dalla distribuzione di MOLIÈRE.

Una distribuzione che soddisfi queste condizioni si ottiene ammettendo che anzichè la densità degli elettroni e dei fotoni di una ben determinata energia sia il loro numero fra r e $r + dr$ che segue una legge gaussiana.

Rimandando al n. 6, 1 e al prossimo lavoro (II) per una più approfondita discussione di tale ipotesi, notiamo che essa dà evidentemente luogo a densità degli elettroni e dei fotoni, sia parziali che integrali, le quali, in prossimità dell'asse si comportano tutte come $1/r$; ossia tutte queste densità hanno nell'origine lo stesso comportamento delle formule di Molière ad eccezione della densità degli elettroni di una ben determinata energia la quale diverge assai più violentemente (come $1/r$ anzichè come $1/r^{1/3}$).

Per quanto riguarda il comportamento alle grandi distanze dall'asse si può notare che l'ipotesi del « numero gaussiano » dà luogo a valori dei momenti di ordine superiore al secondo maggiori di quelli che si deducono dall'ipotesi della « densità gaussiana » pur restando sempre al di sotto di quelli che si deducono dalla distribuzione di Molière.

Nel complesso l'ipotesi del « numero gaussiano » sembra quindi essere un poco migliore di quella della « densità gaussiana »; queste per altro sono le uniche distribuzioni al giorno d'oggi, che si prestano a tener conto in modo semplice del valore finito della energia del primario.

Un altro pregio di tali distribuzioni è che una volta noti i risultati numerici relativi per esempio all'ipotesi del « numero gaussiano », con assai semplici operazioni si possono dedurre i corrispondenti risultati relativi all'ipotesi della « densità gaussiana ». E dato che in prossimità dell'origine la legge di distribuzione di Molière è intermedia fra le due, è possibile trarre alcune conclusioni anche nei riguardi dei risultati che si otterrebbero da questa ultima. (Su questo punto torneremo nel n. 6, 1).

5, 1. – *Considerazioni generali.*

Consideriamo uno sciame a cascata puramente elettronica generato da un elettrone di energia $E_p = \exp [y_p]$ a una altezza t_a al di sopra dello strumento di misura.

Noi rappresenteremo lo spettro degli elettroni a distanza r dall'asse dello sciame, alla quota dello strumento di misura, a mezzo della espressione

$$\pi(E_p, E, t_a)\,\mathrm{d}E \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1}{\sqrt{\overline{x^2}}}\exp\left[-\frac{1}{2}\frac{r^2}{\overline{x^2}}\right]\mathrm{d}r\,, \tag{6}$$

dove $\pi(E_p, E, t_a)\,\mathrm{d}E$ rappresenta, secondo le notazioni di ROSSI e GREISEN ([17]), lo spettro differenziale degli elettroni quale si deduce dalla teoria a cascata unidimensionale, e $\overline{x^2}$ è lo scarto quadratico medio degli elettroni di energia fra E e $E + \mathrm{d}E$ dall'asse dello sciame e sarà in generale una funzione oltre che della energia E anche di E_p e di t_a.

L'ipotesi che gli elettroni di una ben determinata energia abbiano una distribuzione spaziale di forma gaussiana verrà discussa nel n. 6, 1.

Per avere ora il numero delle particelle che cadono fra r e $r + \mathrm{d}r$ basta integrare le (6) rispetto a E da zero a E_p:

$$N_e(0, r)\,\mathrm{d}r = \mathrm{d}r\int_0^{E_p}\pi(E_p, E, t_a)\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1}{\sqrt{\overline{x^2}}}\exp\left[-\frac{1}{2}\frac{r^2}{\sqrt{\overline{x^2}}}\right]\mathrm{d}E\,. \tag{7}$$

Nel caso in cui lo sciame investa uno strato, per esempio di Pb, di spessore t, il numero delle particelle che emergono al di sotto di questo strato è dato evidentemente dalla espressione:

$$N_e(t, r)\,\mathrm{d}r = \mathrm{d}r\int_0^{E_p}\pi(E_p, E, t_a)\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1}{\sqrt{\overline{x^2}}}\exp\left[-\frac{1}{2}\frac{r^2}{\sqrt{\overline{x^2}}}\right]\Pi\,(E_s, 0, t)\,\mathrm{d}E\,, \tag{8}$$

dove $\Pi(E_s, 0, t)$ è il numero totale degli elettroni di uno sciame generato da un primario di energia E_s e che emergono dallo strato di Pb di spessore t; $E_s = E(\varepsilon_a/\varepsilon_s)$ è l'energia degli elettroni espressa in unità della energia critica ε_s del materiale solido anzichè dell'aria.

Espressioni del tutto analoghe alle (6), (7), (8) valgono naturalmente per i quanti γ presenti nello sciame esteso, i quali, specialmente sotto Pb, contribuiscono in modo assai notevole al numero totale degli elettroni.

Come verrà mostrato nella appendice I, il contributo dovuto ai fotoni di bassa energia che vengono irraggiati dagli elettroni nell'attraversare il materiale sovrastante le camere e che giunti nelle loro vicinanze generano un elettrone molle, è invece abbastanza piccolo da poter essere trascurato.

Si tratta ora di calcolare le espressioni (7) e (8) le quali, per altro, non sono molto comode se non si introducono alcune ipotesi semplificative.

Allo scopo di chiarire il significato di tali ipotesi, consideriamo separatamente i tre fattori che figurano sotto il segno di integrale della (8).

([17]) B. ROSSI e K. GREISEN: *Rev. Mod. Phys.*, 13, 240 (1941).

a) Spettro differenziale degli elettroni dello sciame.

Alla quota di 3 500 m s.l.m., a cui sono state eseguite le misure, la quasi totalità degli sciami estesi ha raggiunto il suo massimo sviluppo al di sopra della stazione di osservazione, circostanza questa che normalmente giustifica la sostituzione dello spettro effettivo $\pi(E_p, E, t_a)\,\mathrm{d}E$ con la cosiddetta *distribuzione normale o traccia elettronica*, la quale costituisce una assai buona approssimazione lungo la maggior parte della estensione longitudinale dello sciame salvo che prima del massimo e negli ultimi stadi del suo sviluppo. In questa approssimazione, che è quella in sostanza posta a base delle usuali trattazioni degli sciami estesi, è possibile dare una funzione di struttura dello sciame indipendente da E_p e t_a.

La distribuzione normale però si estende fino a energia infinita, il che come vedremo, è tollerabile per il calcolo della (7) ma non della (8) dato che in essa figura il fattore $\Pi(E_s, 0, t)$ che è una funzione crescente della energia degli elettroni.

Nel calcolo della (8) è pertanto necessario distinguere due campi di variabilità dell'energia E degli elettroni: energie basse per cui è lecito sostituire allo spettro effettivo la distribuzione normale, energie alte per cui tale approssimazione non è più lecita. Come limite tra questi due intervalli di energia abbiamo preso

$$E_m = K_m = 20{,}1\ \varepsilon_a = 1{,}73 \cdot 10^9\ \text{eV} \qquad \text{ossia} \qquad y_m = 3\,, \tag{9}$$

e per energie basse ci siamo serviti delle distribuzioni normali calcolate da RICHARDS e NORDHEIM ([18]), per le energie alte abbiamo adattato le formule dedotte da HEISENBERG ([19]) dalle usuali equazioni della teoria degli sciami nella approssimazione in cui si trascurano le perdite di energia per ionizzazione in modo da rappresentare soddisfacentemente i risultati di BHABHA e CHAKRABARTY ([7]).

b) Scarto quadratico medio degli elettroni (e dei fotoni) dall'asse dello sciame.

Come già si è detto, lo scarto quadratico medio $\overline{x^2}$ degli elettroni (e dei fotoni) di energia E dipende anche da E_p e t_a.

Si può però notare che il contributo principale alla estensione laterale dello sciame è dato dagli urti coulombiani multipli subiti dagli elettroni nelle ultime unità di radiazione le quali rappresentano uno spessore piccolo rispetto alla estensione longitudinale di uno sciame esteso generato da un elettrone veloce nell'alta atmosfera. Tale argomentazione è pienamente confermata dai risul-

---

([18]) J. A. RICHARDS e L. W. NORDHEIM: *Phys. Rev.*, **74**, 1106 (1948).
([19]) W. HEISEMBERG: *Kosmische Strahlung* (Springer Verlag, Berlin, 1943), cap. 2.

tati di BORSELLINO ([20]), il quale trova appunto che $\overline{x^2}$ non dipende fortemente da E_p e t_a.

È quindi naturale far uso sistematicamente dei valori di $\overline{x^2}$ calcolati da ROBERG e NORDHEIM ([21]) prendendo come spettro delle particelle di uno sciame la distribuzione normale a cui si è precedentemente accennato.

Tale procedimento è senz'altro corretto e coerente con quanto si è detto in *a* a proposito dello spettro delle particelle, per $E \leqslant E_m$. Per $E \geqslant E_m$ i valori di $\overline{x^2}$ dati da ROBERG e NORDHEIM sono certamente maggiori di quelli veri in quanto essi corrispondono a sciami generati da elettroni primari di energia infinita anzichè E_p. È facile però convincersi che questo errore è senz'altro trascurabile semplicemente calcolando con le formule di ROBERG e NORDHEIM il valore di $\overline{x^2}$ corrispondente a E_p.

A ciò si aggiunga che le distanze dall'asse dello sciame che intervengono a queste elevate energie sono inferiori alle dimensioni della camera di ionizzazione e pertanto anche un errore relativamente grande nel valore di $\overline{x^2}$ non influisce sensibilmente sul risultato (n. 5, 4).

In conclusione ricordiamo che, secondo ROBERG e NORDHEIM, gli scarti quadratici medi degli elettroni e dei fotoni sono rappresentati rispettivamente dalle espressioni

$$\overline{x_e^2} = \frac{\delta_e^2}{E^2}\,, \qquad \overline{x_\gamma^2} = \frac{\delta_\gamma^2}{K^2}\,, \tag{10}$$

dove δ_e^2 e δ_γ^2 sono due funzioni lentamente variabili delle rispettive energie che per valori di queste, grandi rispetto alla unità, si possono prendere come costanti e precisamente

$$\delta_e^2 = 3{,}85 \cdot 10^{-2}\,, \qquad \delta_\gamma^2 = 6{,}80 \cdot 10^{-2}\,. \tag{11}$$

Per $E \geqslant E_m$ (vedi formula (9)) faremo uso delle espressioni (10) e (11) mentre per $E \leqslant E_m$ utilizzeremo le tabelle di ROBERG e NORDHEIM.

c) Spettro integrale degli elettroni sotto piombo.

Il fattore $\Pi(E_s, 0, t)$ è quello che caratterizza le misure di densità sotto piombo rispetto a quelle in aria. Per $E \leqslant E_m$ ci siamo serviti delle tabelle di BHABHA e CHAKRABARTY mentre per $E \geqslant E_m$ abbiamo utilizzato le formule di HEISENBERG come preciseremo nel seguito.

Qui ci vogliamo limitare a una osservazione di carattere qualitativo: per spessori di Pb corrispondenti, grosso modo, al massimo della curva di ROSSI $\Pi(E_s, 0, t)$ è all'incirca proporzionale ad E_s e quindi ad E; ricordando le (10)

([20]) A. BORSELLINO: *Nuovo Cimento*, **6**, 543, 1949.
([21]) J. ROBERG e L. W. NORDHEIM: *Phys. Rev.*, **75**, 444 (1949).

e (11) possiamo quindi scrivere la (8) nella seguente forma

$$N_e(t, r) \cong \int_0^{E_p} \pi(E_p, E, t_a) \frac{E}{\delta_e} \exp\left[-\frac{1}{2}\frac{r^2}{\delta_e^2}E^2\right] E\,\mathrm{d}E\,,$$

da cui risulta evidente quanta importanza abbia sotto piombo la parte dello spettro degli elettroni verso le alte energie e la necessità quindi di rappresentarla abbastanza correttamente.

Un'ultima approssimazione, di cui ci serviremo nel seguito per $E \geqslant E_m$ è la seguente: la gaussiana che figura nella (8) si può sostituire con una funzione costante da 0 fino a una certa distanza r dall'asse ove bruscamente diventa nulla e rimane tale fino all'infinito.

Il valore di r per cui ha luogo tale discontinuità si ottiene evidentemente imponendo la condizione

$$(12)\qquad \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\sqrt{\overline{x^2}}}\int_0^{\infty}\exp\left[-\frac{1}{2}\frac{r^2}{\overline{x^2}}\right]\mathrm{d}r = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\sqrt{\overline{x^2}}}\int_0^{r}\mathrm{d}r = 1\,,\quad \text{ossia}\quad r = \sqrt{\overline{x^2}}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,,$$

che, facendo uso delle (10) e (11), dà

$$(13)\qquad r_e = \frac{0{,}245}{E}\,,\qquad r_\gamma = \frac{0{,}327}{K}\,,$$

relazioni che stabiliscon~ una corrispondenza fra energia massima degli elettroni presenti a una distanza r dall'asse dello sciame e la distanza r medesima.

Applicando le (13) ai valori E_m dati dalla (9) si ottiene

$$(14)\qquad \begin{cases} r_{em} = 1{,}22\cdot 10^{-2}\,X_0\,,\\ r_{\gamma m} = 1{,}63\cdot 10^{-2}\,X_0\,,\end{cases}$$

ossia, ricordando il valore di X_0, si può dire che in una sciame esteso a cascata elettronica per distanze dall'asse eguali o maggiori di

$$(05)\qquad r_{em} = 1{,}22\cdot 10^{-2}\cdot 456\ m \cong 5{,}5\ m$$

sono presenti solo elettroni di energie inferiori o al massimo eguali a $1{,}73\cdot 10^9$ eV.

5, 2. – *Calcolo dello sciame per* $E \leqslant E_m = 20{,}1$ *ossia* $r \geqslant r_m \sim 10^{-2}\,X_0$.

Come si è chiarito nel numero precedente, per $E \leqslant E_m$ è possibile calcolare una funzione di struttura dello sciame indipendente dalla energia del primario E_p e dalla profondità t_a, anche sotto piombo.

Gli spettri degli elettroni e dei fotoni vengono sostituiti con le corrispondenti distribuzioni normali le quali, recentemente, sono state ricalcolate da Richards e Nordheim ([14]) i quali hanno dato delle tabelle numeriche che si estendono, per il caso dell'aria, fino a energie bassissime e che, secondo gli autori, dovrebbero avere una precisione del ± 10 %.

Nel seguito seguiremo le notazioni di questi autori, ossia

$$(16)\qquad 0,437\, f(E)\, \mathrm{d}E \quad \text{e} \quad 0,437\, g(K)\, \mathrm{d}K$$

rappresentano le distribuzioni normali relative agli elettroni e ai fotoni normalizzate ad 1 elettrone incidente in tutto lo spettro; ossia

$$(17)\qquad \begin{cases} 0,437 \displaystyle\int_0^\infty f(E)\, \mathrm{d}E = 0,437 \cdot 2,30 = 1\,, \\ 0,437 \displaystyle\int_0^\infty g(K)\, \mathrm{d}K = 0,437 \cdot \left(2,25 \ln \frac{0,050}{0,014} + 6,6\right) = 0,437 \cdot 9,46 = 4,11\,, \end{cases}$$

dove i risultati relativi ai fotoni sono stati estesi verso le basse energie da 4 MeV a 1,2 MeV ponendo in questo intervallo $g(K) = 2,55/K$.

Ricordiamo che per $E \gg 1$ le funzioni $f(E)$ e $g(K)$ si comportano nel seguente modo

$$(18)\qquad f(E) \to \frac{1}{E^2}\,, \qquad g(K) = \frac{9}{7}\frac{1}{K^2}\,.$$

Le (7) e (8) si possono sostituire con le espressioni:

$$(19)\qquad N_e(0, r) = \Pi(E_p, 0, t_a) P(0, r)\,,$$

con

$$(20)\qquad P(0, r) = \int_0^\infty p(E, r)\, \mathrm{d}E;$$

$$(21)\qquad N_e(t, r) = \Pi(E_p, 0, t_a) P(t, r)\,,$$

con

$$(22)\qquad P(t, r) = \int_0^\infty p(E, r) \Pi(E_s, 0, t)\, \mathrm{d}E\,,$$

dove

$$(23)\qquad \begin{cases} p(E, r) = 0,437 \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\, \dfrac{1}{\sqrt{\overline{x^2}}}\, f(E) \exp\left[-\dfrac{1}{2}\, \dfrac{r^2}{\overline{x^2}(E)}\right], \\ \displaystyle\int_0^\infty \mathrm{d}E \int_0^\infty p(E, r)\, \mathrm{d}r = 1\,, \end{cases}$$

è una funzione che caratterizza la struttura, spaziale ed energetica, di tutti gli sciami estesi a cascata elettronica.

Tabella IV

y \ r	0,00	$1 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-2}$	$2 \cdot 10^{-2}$	$3 \cdot 10^{-2}$	$4 \cdot 10^{-2}$	$5 \cdot 10^{-2}$	$6 \cdot 10^{-2}$
— 3,0	0,234	0,234	0,234	0,234	0,234	0,234	0,232	0,232
— 2,5	0,400	0,400	0,400	0,400	0,400	0,400	0,370	0,37
— 2,0	0,560	0,560	0,560	0,560	0,560	0,550	0,520	0,51
— 1,5	0,710	0,710	0,710	0,710	0,710	0,680	0,670	0,65
— 1,0	0,880	0,880	0,880	0,880	0,86	0,850	0,820	0,80
— 0,5	1,04	1,04	1,04	1,04	1,02	1,00	0,970	0,95
0	1,20	1,20	1,20	1,18	1,16	1,14	1,10	1,06
0,5	1,37	1,37	1,37	1,33	1,29	1,22	1,15	1,06
1,0	1,51	1,51	1,49	1,42	1,32	1,18	1,00	0,86
1,5	1,62	1,62	1,55	1,38	1,16	0,85	0,60	0,40
2,0	1,69	1,69	1,53	1,17	0,68	0,37	0,11	0,03
2,5	1,75	1,75	1,37	0,70	0,24	0,02	—	—
3,0	1,77	1,77	1,01	0,18	0,001	—	—	—
3,5	1,78	1,75	0,37	0,00	—	—	—	—
4,0	1,78	1,71	0,03	—	—	—	—	—
4,5	1,78	1,57	—	—	—	—	—	—
5,0	1,78	1,34	—	—	—	—	—	—
5,5	1,78	0,78	—	—	—	—	—	—
6,0	1,78	0,21	—	—	—	—	—	—
6,5	1,78	0,00	—	—	—	—	—	—

Tabella V.

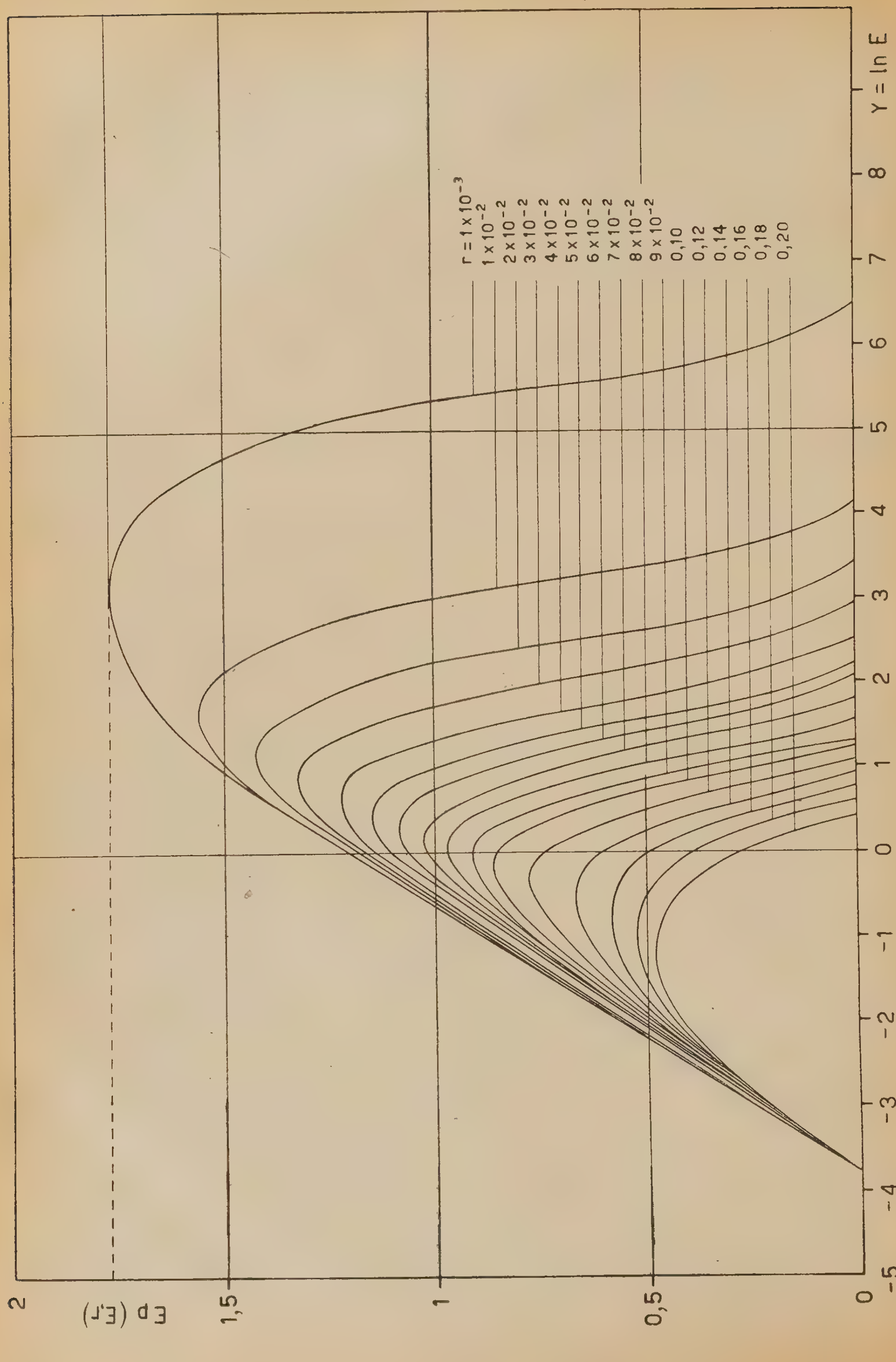
y \ r	0,00	$1 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-2}$	$2 \cdot 10^{-2}$	$3 \cdot 10^{-2}$	$4 \cdot 10^{-2}$	$5 \cdot 10^{-2}$	$6 \cdot 10^{-2}$
— 4,27	0,246	0,246	0,246	0,246	0,246	0,246	0,246	0,245
— 4,0	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250
— 3,5	0,265	0,265	0,265	0,265	0,265	0,265	0,265	0,265
— 3,0	0,285	0,285	0,285	0,284	0,284	0,284	0,284	0,284
— 2,5	0,340	0,340	0,340	0,340	0,340	0,340	0,339	0,330
— 2,0	0,407	0,407	0,407	0,407	0,407	0,407	0,406	0,396
— 1,5	0,476	0,476	0,476	0,476	0,475	0,474	0,472	0,471
— 1,0	0,467	0,467	0,467	9,466	0,463	0,462	0,460	0,457
— 0,5	0,457	0,457	0,457	0,457	0,452	0,450	0,445	0,440
0	0,450	0,450	0,449	0,447	0,443	0,436	0,430	0,421
0,5	0,440	0,440	0,439	0,437	0,430	0,420	0,403	0,390
1,0	0,435	0,435	0,434	0,423	0,405	0,385	0,360	0,330
1,5	0,430	0,430	0,423	0,395	0,360	0,305	0,250	0,200
2,0	0,425	0,425	0,404	0,345	0,270	0,180	0,125	0,075
2,5	0,420	0,420	0,375	0,190	0,125	0,070	0,020	—
3,0	0,417	0,417	0,307	0,123	0,027	—	—	—
3,5	0,415	0,415	0,160	—	—	—	—	—
4,0	0,415	0,406	0,046	—	—	—	—	—
4,5	0,415	0,390	—	—	—	—	—	—
5,0	0,415	0,353	—	—	—	—	—	—
5,5	0,415	0,250	—	—	—	—	—	—
6,0	0,415	0,125	—	—	—	—	—	—
6,5	0,415	0,040	—	—	—	—	—	—
7,0	0,415	—	—	—	—	—	—	—

$p(E, r)$

$7 \cdot 10^{-2}$	$8 \cdot 10^{-2}$	$9 \cdot 10^{-2}$	0,10	0,12	0,14	0,16	0,18	0,20	r / y
0,230	0,270	0,228	0,227	0,224	0,220	0,216	0,212	0,207	— 3,0
0,370	0,36	0,36	0,35	0,35	0,35	0,35	0,35	0,34	— 2,5
0,510	0,50	0,50	0,49	0,49	0,49	0,46	0,44	0,41	— 2,0
0,650	0,64	0,64	0,64	0,62	0,57	0,54	0,51	0,47	— 1,5
0,800	0,79	0,78	0,75	0,70	0,64	0,58	0,52	0,45	— 1,0
0,920	0,89	0,85	0,80	0,72	0,64	0,58	0,46	0,41	— 0,5
1,02	0,97	0,92	0,86	0,74	0,62	0,51	0,41	0,32	0
0,97	0,88	0,76	0,67	0,45	0,32	0,19	0,14	0,08	0,5
0,70	0,54	0,40	0,30	0,15	0,08	0,01	—	—	1,0
0,23	0,14	0,08	0,02	—	—	—	—	—	1,5
—	—	—	—	—	—	—	—	—	2,0
—	—	—	—	—	—	—	—	—	2,5
—	—	—	—	—	—	—	—	—	3,0
—	—	—	—	—	—	—	—	—	3,5
—	—	—	—	—	—	—	—	—	4,0
—	—	—	—	—	—	—	—	—	4,5
—	—	—	—	—	—	—	—	—	5,0
—	—	—	—	—	—	—	—	—	5,5
—	—	—	—	—	—	—	—	—	6,0
—	—	—	—	—	—	—	—	—	6,5

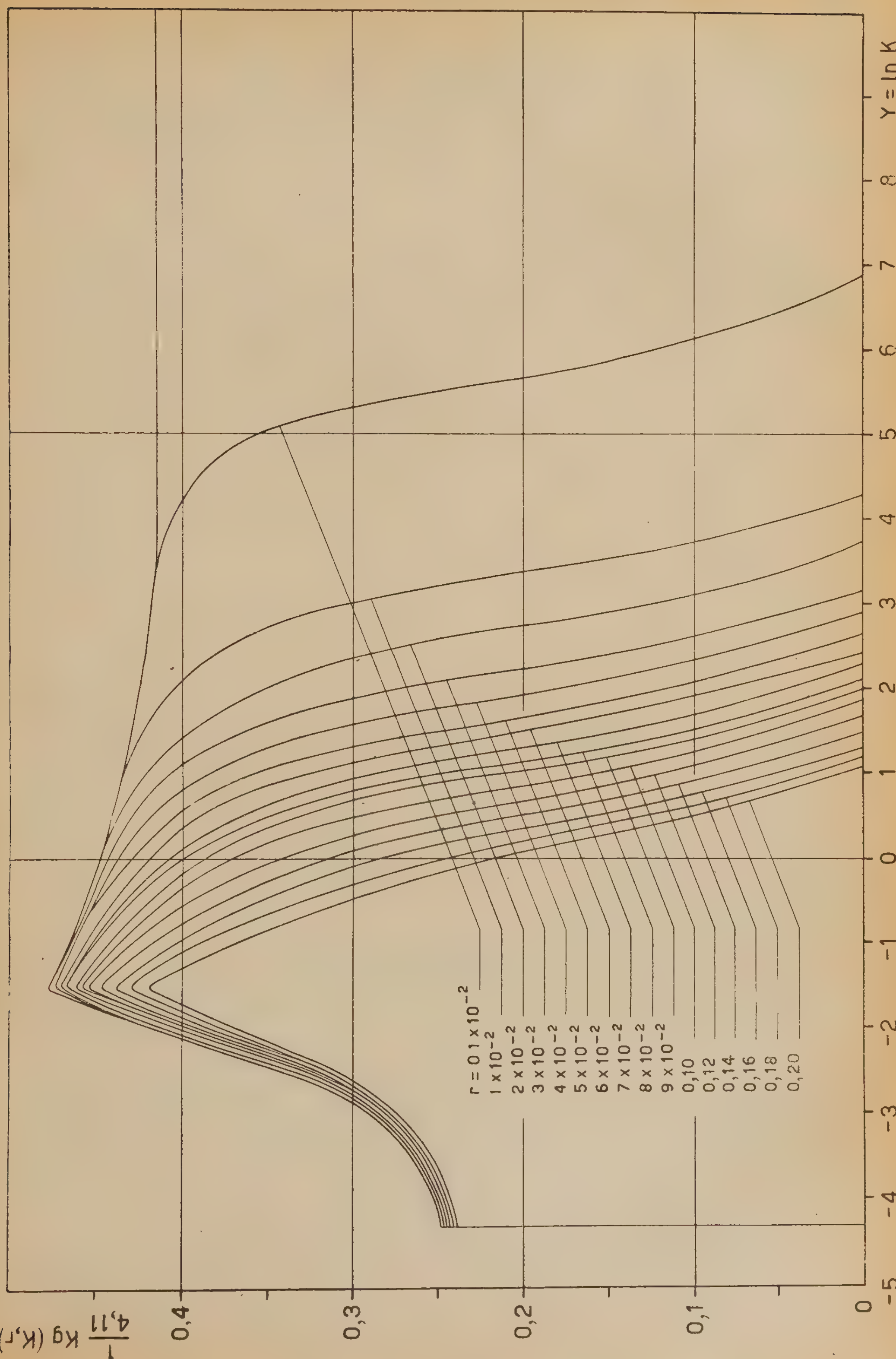
,11 $Kq(K, r)$.

$7 \cdot 10^{-2}$	$8 \cdot 10^{-2}$	$9 \cdot 10^{-2}$	0,10	0,12	0,14	0,16	0,18	0,20	r / y
0,245	0,245	0,244	0,244	0,243	0,242	0,240	0,239	0,238	— 4,27
0,250	0,250	0,249	0,249	0,248	0,248	0,246	0,245	0,243	— 4,0
0,265	0,265	0,264	0,264	0,263	0,262	0,260	0,258	0,252	— 3,5
0,283	0,283	0,282	0,282	0,280	0,279	0,277	0,275	0,272	— 3,0
0,325	0,323	0,322	0,321	0,320	0,319	0,317	0,316	0,310	— 2,5
0,390	0,385	0,384	0,382	0,380	0,376	0,374	0,368	0,360	— 2,0
0,469	0,466	0,464	0,460	0,455	0,446	0,438	0,429	0,418	— 1,5
0,453	0,450	0,440	0,435	0,430	0,420	0,400	0,390	0,370	— 1,0
0,432	0,425	0,416	0,408	0,398	0,370	0,345	0,320	0,290	— 0,5
0,412	0,401	0,389	0,375	0,346	0,316	0,283	0,250	0,218	0
0,365	0,350	0,325	0,300	0,250	0,200	0,160	0,125	0,100	0,5
0,290	0,245	0,220	0,180	0,125	0,080	0,040	0,030	—	1,0
0,150	0,110	0,075	0,055	0,020	—	—	—	—	1,5
0,045	0,015	0,005	—	—	—	—	—	—	2,0
—	—	—	—	—	—	—	—	—	2,5
—	—	—	—	—	—	—	—	—	3,0
—	—	—	—	—	—	—	—	—	3,5
—	—	—	—	—	—	—	—	—	4,0
—	—	—	—	—	—	—	—	—	4,5
—	—	—	—	—	—	—	—	—	5,0
—	—	—	—	—	—	—	—	—	5,5
—	—	—	—	—	—	—	—	—	6,0
—	—	—	—	—	—	—	—	—	6,5
—	—	—	—	—	—	—	—	—	7,0



Ep (E,r)
Y = ln E
r = 1 x 10^-3
1 x 10^-2
2 x 10^-2
3 x 10^-2
4 x 10^-2
5 x 10^-2
6 x 10^-2
7 x 10^-2
8 x 10^-2
9 x 10^-2
0,10
0,12
0,14
0,16
0,18
0,20

Fig. 4.



$\frac{1}{4,11}$ Kg (K,r)
0,4
0,3
0,2
0,1
0
Y = ln K
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
r = 0,1 x 10^{-2}
1 x 10^{-2}
2 x 10^{-2}
3 x 10^{-2}
4 x 10^{-2}
5 x 10^{-2}
6 x 10^{-2}
7 x 10^{-2}
8 x 10^{-2}
9 x 10^{-2}
0,10
0,12
0,14
0,16
0,18
0,20

Fig. 5.

Espressioni del tutto analoghe alle precedenti valgono per i quanti γ salvo che la funzione $p(E, r)$ è sostituita dalla funzione

$$(24)\quad \begin{cases} q(K, r) = 0{,}437 \sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \dfrac{1}{\sqrt{\overline{x^2}}} g(K) \exp\left[-\dfrac{1}{2} \dfrac{r^2}{\overline{x^2}(K)}\right], \\ \displaystyle\int\limits_{1,2\,\text{MeV}}^{\infty} \mathrm{d}K \int\limits_{0}^{\infty} q(K, r)\,\mathrm{d}r = 4{,}11\,. \end{cases}$$

Gli integrali rispetto alla energia che figurano in (23) e (24) possono essere estesi fino ad ∞ invece che fino ad E_p dato che per $r \geqslant r_m$ il fattore esponenziale provvede a rendere trascurabile l'integrando già per energie inferiori o al massimo dell'ordine di $2 \cdot 10^9$ eV le quali sono enormemente più piccole dei più bassi valori ammissibili per E_p.

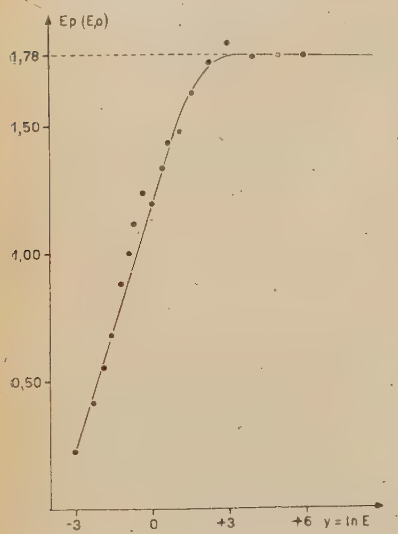


Fig. 6.

Nelle tabelle IV e V e nelle figg. 4 e 5 sono riportati i valori delle funzioni $E_p(E, r)$ e $(1/4{,}11)\, Kq(K, r)$ in funzione di $y = \ln E = \ln K$.

I valori di

$$E_p(E, 0) \qquad \text{e} \qquad Kq(K, 0)$$

quali si deducono dalle tabelle di RICHARDS, NORDHEIM, e ROBERG e NORDHEIM mostravano qualche lieve irregolarità che noi abbiamo eliminato con un conveniente processo di interpolazione di cui un esempio è mostrato nella fig. 6. Alcune irregolarità delle funzioni riportate nelle tabelle IV e V sono state eliminate nelle figg. 4 e 5; esse pure sono dovute ad imprecisione dei calcoli o all'impiego di diverse formule nei diversi intervalli di energia.

Abbiamo verificato che integrando numericamente le curve delle tabelle IV e V la normalizzazione da noi imposta fosse verificata entro circa l'1 %.

Per il calcolo di $P(t, r)$ è necessario conoscere le $\Pi(E, 0, t)$ e $\Pi(K, 0, t)$. Per la $\Pi(E, 0, t)$ ci siamo serviti delle tabelle date da BHABHA e CHAKRABARTY (7).

Per il calcolo della $\Pi(K, 0, t)$ ci siamo serviti del seguente procedimento: per spessori superiori a qualche unità di radiazione a mezzo delle formule di ROSSI e GREISEN (17), in approssimazione B, abbiamo calcolato il rapporto

$$(25)\qquad R = \frac{\Pi(K, 0, t)}{\Pi(E, 0, t)} = \sqrt{s}\, \frac{M(s)}{H_1(s)} \left[\frac{\lambda_1''t + \dfrac{1}{s^2}}{\lambda_1''t + \dfrac{1}{2s^2}}\right]^{1/2} \exp\left[-1/2\right],$$

il quale risulta evidentemente una funzione lentamente variabile di y_p e abbiamo moltiplicato i corrispondenti valori di BHABHA e CHAKRABARTY per R.

Per spessori t inferiori a una unità di radiazione ci siamo serviti delle tabelle pubblicate da ARLEY ([22]).

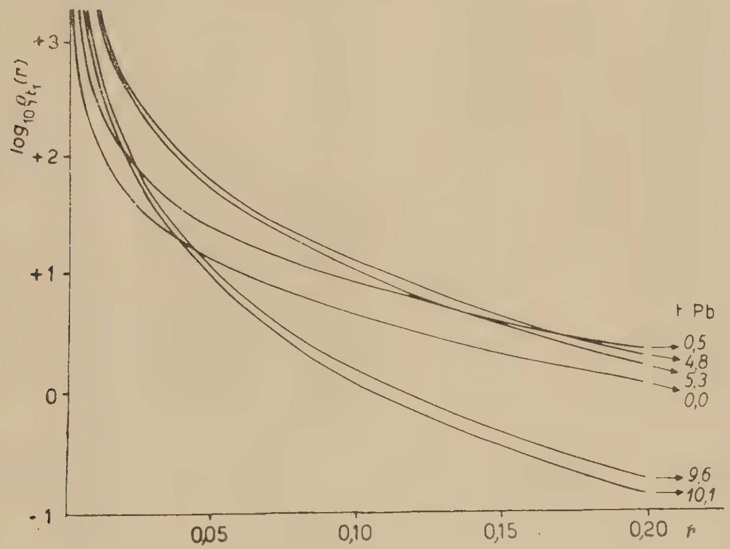


Fig. 7.

Nelle tabelle VI-*a* e VI-*b* diamo i valori così ottenuti di $P_e(t, r)$ e $P_\gamma(t, r)$ e delle corrispondenti funzioni di densità

$$\rho(t, r) = \frac{1}{2\pi r} \{ P_e(t, r) + P_\gamma(t, r) \} ; \tag{26}$$

queste sono riprodotte nella fig. 7.

Come si vede dalle tabelle VI-*a* e VI-*b* a grandi distanze dall'asse dello sciame il grosso del contributo sotto Pb è dovuto ai raggi γ.

Alle brevi distanze invece il contributo dei fotoni è all'incirca eguale a quella degli elettroni, osservazione questa di cui faremo uso nel prossimo numero.

5, 3. – *Calcolo dello sciame per* $E \geqslant E_m = 20{,}1\,\varepsilon_a$ *ossia* $r \leqslant t_m \sim 10^{-2} X_0$.

Come si è fatto notare nel n. 3 quando l'energia degli elettroni è grande, ossia alle brevi distanze dall'asse, non è più lecito sostituire lo spettro differenziale degli elettroni con la distribuzione normale. Ne segue che non si ha

([22]) N. ARLEY e B. ERICSEN: *Det. Kgl. Danske Videnskabernes Selskab-Math.-Fysiske Med.*, **17**, 11 (1940).

r	$P_e(0; r)$	$P_\gamma(0; r)$	$P_\gamma(0{,}06; r)$ (*)
$1 \cdot 10^{-3}$	11,0	16,5	0,850
$1 \cdot 10^{-2}$	6,82	12,5	0,604
$2 \cdot 10^{-2}$	5,54	11,2	0,517
$3 \cdot 10^{-2}$	4,78	10,5	0,468
$4 \cdot 10^{-2}$	4,17	9,94	0,431
$5 \cdot 10^{-2}$	3,72	9,48	0,402
$6 \cdot 10^{-2}$	3,41	9,07	0,375
$7 \cdot 10^{-2}$	3,14	8,70	0,351
$8 \cdot 10^{-2}$	2,91	8,38	0,328
$9 \cdot 10^{-2}$	2,70	8,13	0,311
$1 \cdot 10^{-1}$	2,49	7,85	0,295
$1{,}2 \cdot 10^{-1}$	2,16	7,43	0,269
$1{,}4 \cdot 10^{-1}$	1,90	7,06	0,251
$1{,}6 \cdot 10^{-1}$	1,63	6,70	0,222
$1{,}8 \cdot 10^{-1}$	1,46	6,41	0,207
$2{,}0 \cdot 10^{-1}$	1,29	6,04	0,180

(*) 0,06 X_0 corrisponde ad 1 mm di ottone (spessore delle pareti della camera).

TABEL

r \ t	4,8			5,3		
	$P_e(4{,}8; r)$	$P_\gamma(4{,}8; r)$	$\rho_e(4{,}8; r) + \rho_\gamma(4{,}8; r)$	$P_e(5{,}3; r)$	$P_\gamma(5{,}3; r)$	$\rho_e(5{,}3; r) + \rho_\gamma(5{,}3; r)$
$1 \cdot 10^{-3}$	400	444	134 110	420	497	145 900
$1 \cdot 10^{-2}$	43,0	68,5	1 774	40	67	1 700
$2 \cdot 10^{-2}$	20,0	34,4	432	17,6	32,4	398
$3 \cdot 10^{-2}$	11,6	23,6	186,5	10,0	21,4	166
$4 \cdot 10^{-2}$	7,80	17,3	99,6	6,58	15,6	88,2
$5 \cdot 10^{-2}$	5,30	13,8	60,7	4,37	12,3	53,0
$6 \cdot 10^{-2}$	4,10	11,3	40,8	3,35	10,2	35,9
$7 \cdot 10^{-2}$	3,22	9,45	28,7	2,60	8,46	25,1
$8 \cdot 10^{-2}$	2,65	7,68	20,6	2,13	6,82	17,8
$9 \cdot 10^{-2}$	2,15	6,74	15,7	1,72	5,87	13,4
$1{,}0 \cdot 10^{-1}$	1,75	5,83	12,1	1,39	5,10	10,3
$1{,}2 \cdot 10^{-1}$	1,20	4,65	7,75	0,94	4,00	6,54
$1{,}4 \cdot 10^{-1}$	0,90	3,68	5,20	0,695	3,12	4,33
$1{,}6 \cdot 10^{-1}$	0,59	2,94	3,51	0,451	2,46	2,89
$1{,}8 \cdot 10^{-1}$	0,465	2,56	2,67	0,352	2,14	2,20
$2{,}0 \cdot 10^{-1}$	0,360	1,99	1,87	0,272	1,62	1,51

a.

$P_e(0; r) + P_\gamma(0{,}06; r)$	$\rho_e(0; r) + \rho_\gamma(0{,}06; r)$	r
11,85	1,892	$1 \cdot 10^{-3}$
7,42	118,1	$1 \cdot 10^{-2}$
6,06	47,3	$2 \cdot 10^{-2}$
5,25	27,9	$3 \cdot 10^{-2}$
4,60	18,3	$4 \cdot 10^{-2}$
4,12	13,1	$5 \cdot 10^{-2}$
3,78	10,0	$6 \cdot 10^{-2}$
3,49	7,94	$7 \cdot 10^{-2}$
3,24	6,44	$8 \cdot 10^{-2}$
3,01	5,33	$9 \cdot 10^{-2}$
2,78	4,43	$1 \cdot 10^{-1}$
2,43	3,22	$1{,}2 \cdot 10^{-1}$
2,15	2,44	$1{,}4 \cdot 10^{-1}$
1,85	1,84	$1{,}6 \cdot 10^{-1}$
1,67	1,47	$1{,}8 \cdot 10^{-1}$
1,47	1,17	$2{,}0 \cdot 10^{-1}$

b.

9,6			10,1			t / r
$P_e(9{,}6; r)$	$P_\gamma(9{,}6; r)$	$\rho_e(9{,}6; r) + \rho_\gamma(9{,}6; r)$	$P_e(10{,}1; r)$	$P_\gamma(10{,}1; r)$	$\rho_e(10{,}1; r) + \rho_\gamma(10{,}1; r)$	
270	485	121 100	243	465	112 600	$1 \cdot 10^{-3}$
12,4	26,1	612	10,3	23,2	533	$1 \cdot 10^{-2}$
4,15	9,95	112	3,39	8,54	95,0	$2 \cdot 10^{-2}$
1,92	6,08	42,5	1,55	5,09	35,1	$3 \cdot 10^{-2}$
1,13	3,89	20,0	0,900	3,26	16,5	$4 \cdot 10^{-2}$
0,664	2,85	11,2	0,523	2,36	9,20	$5 \cdot 10^{-2}$
0,468	2,07	6,73	0,366	1,71	5,51	$6 \cdot 10^{-2}$
0,339	1,62	4,45	0,263	1,33	3,62	$7 \cdot 10^{-2}$
0,268	1,18	2,88	0,208	0,954	2,30	$8 \cdot 10^{-2}$
0,208	0,956	2,06	0,162	0,773	1,66	$9 \cdot 10^{-2}$
0,155	0,785	1,50	0,125	0,628	1,20	$1{,}0 \cdot 10^{-1}$
0,102	0,584	0,909	0,0794	0,564	0,851	$1{,}2 \cdot 10^{-1}$
0,0723	0,423	0,563	0,0560	0,333	0,442	$1{,}4 \cdot 10^{-1}$
0,0427	0,317	0,357	0,0337	0,249	2,081	$1{,}6 \cdot 10^{-1}$
0,0330	0,268	0,266	0,0250	0,212	0,209	$1{,}8 \cdot 10^{-1}$
0,0246	0,188	0,169	0,0183	0,145	0,130	$2{,}0 \cdot 10^{-1}$

più a che fare con una funzione di struttura e quindi il calcolo va ripetuto per ciascun valore delle variabili E_p e t_a.

Allo scopo di non complicare eccessivamente i calcoli, ci siamo serviti, come formule di interpolazione, delle espressioni dedotte da HEISENBERG [19] con il metodo di LANDAU e RUMER:

$$\Pi(E, 1, t) = \frac{\sqrt{y-\beta}}{\sqrt{t-\alpha}} \frac{1}{\sqrt{t}} \exp[-t] \exp[2\sqrt{t-\alpha}\sqrt{y-\beta}]\,, \tag{27}$$

$$(\alpha = 1{,}4;\ \beta = 0{,}56)$$

rappresenta il numero di elettroni di energia superiore ad ε_s dovuti ad un elettrone di energia $E\varepsilon_s$ eV e che emergono dallo strato di spessore t. Noi abbiamo posto

$$\Pi(E, 0, t) = Q\,\frac{\sqrt{y-\beta}}{\sqrt{t-\alpha}} \frac{1}{\sqrt{t}} \exp[-t] \exp[2\sqrt{t-\alpha}\sqrt{y-\beta}]\,, \tag{28}$$

dove Q è un fattore lentamente variabile che si può determinare per diversi valori di E e t per confronto fra la (28) e le tabelle di BHABHA e CHAKRABARTY.

Per lo spettro differenziale degli elettroni $\pi(E_p, E, t_a)$ ci siamo serviti della seguente formula data da HEISENBERG:

$$\pi(E_p, E, t_a)\,dE = \frac{1}{\sqrt{t_a}} \exp[-t_a] \exp[2\sqrt{t_a-\alpha}]\,, \tag{29}$$

la quale è un poco diversa dalla derivata, rispetto ad E cambiata di segno, della (27). Tale differenza è dovuta però ad alcune approssimazioni introdotte nella deduzione della (27) dalla (29).

TABELLA VII.

$n-1$	$S(y_p)\,dy(X_0^{-2})$
1.5	$4{,}62 \cdot 10^9 \exp[-1{,}5y_p]\,dy_p$
1.6	$6{,}80 \cdot 10^9 \exp[-1{,}6y_p]\,dy_p$
1.7	$1{,}02 \cdot 10^{10} \exp[-1{,}7y_p]\,dy_p$

Tali formule sono dedotte impiegando il metodo del punto di sella per la cui validità è necessario che la variabile non sia inferiore a 5 [19].

Più precisamente si può usare la (28) solo per $y \geqslant 5$ e la (29) solo per $y_p - y \geqslant 5$. La prima di queste limitazioni non è grave mentre lo è senz'altro la seconda che impone di trattare con un procedimento ancora diverso la parte dello sciame per cui $E \geqslant E_M = \exp[y_p - 6]$.

$E_M \geqslant E \geqslant E_m$.

In questo intervallo di energia abbiamo sostituito le espressioni (28) e (29) nella (8) ed abbiamo fatto uso della approssimazione espressa dalle (12) e (13). Abbiamo così ottenuto per il numero totale di particelle sotto lo strato di spessore t (dovute sia ad elettroni che a quanti γ)

$$(30)\qquad N(t, r) = N(t, r_m) + \int_{E_m}^{0,245/r} \pi(E_p, E, t_a) Q(1 + R) \frac{E}{\delta_e} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \Pi(E_s, 0, t)\, \mathrm{d}E =$$

$$= N(t, r_m) + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\delta\sqrt{t}} \frac{\exp[-t_a]\exp[-t]}{\sqrt{t_a}\sqrt{t_a-\alpha}}\, \psi(E_M, E_m)\,,$$

dove

$$(31)\qquad \psi(r, E_m) = \int_{E_m}^{0,245/r} Q(1 + R) \exp[2\sqrt{t_a-\alpha}\sqrt{y_p - y - \beta}] \exp[y] \times$$

$$\times \exp[2\sqrt{t-\alpha}\sqrt{y + \Delta y - \beta}]\sqrt{y + \Delta y - \beta}\, \mathrm{d}y\,,$$

$$\ln E_M = y_p - 6\,, \qquad \Delta y = \ln\frac{\varepsilon_a}{\varepsilon_s}\,.$$

Il fattore $(1 + R)$ che figura nelle (30) e (31) è stato introdotto per tener conto sia pure in modo approssimato, dei raggi γ presenti nello sciame esteso i quali darebbero luogo nella (30) ad un terzo termine, simile al secondo, salvo che vi figurerebbero $\pi(E_p, K, t_a)(1/\delta_\gamma)\Pi(K_s, 0, t)$ in luogo di $\pi(E_p, E, t_a)(1/\delta_e)\times\Pi(E_s, 0, t)$.

Dalle (11), (18) si vede che si ha

$$\frac{\delta_\gamma}{\delta_e} \sim \frac{9}{7}\,, \qquad \frac{\pi(E_p, K, t_a)}{\pi(E_p, E, t_a)} \sim \frac{9}{7}\,;$$

ricordando la (25) resta quindi giustificata l'introduzione del fattore $(1 + R)$ sotto il segno di integrale che figura nella (30) e (31).

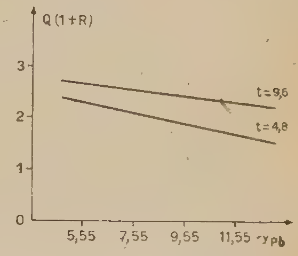


Fig. 8.

Nella fig. 8 diamo l'andamento del prodotto dei due fattori $Q(1 + R)$ per $t = 4,8$ e $t = 9,6$. Come si vede questo fattore varia fra 2,68 e 1,61, ossia si mantiene sempre al di sotto del valore 4 che noi avevamo usato nei nostri calcoli preliminari [4].

$E \geqslant E_M$.

Per queste energie così elevate ci siamo serviti del seguente procedimento suggeritoci da B. FERRETTI.

Scriviamo la (8) nella forma

$$N(t, r) = N(t, r_M) + \int_{E_M}^{\infty} \pi(E_p, E, t_a) n(E, r, t)\, \mathrm{d}E\,, \tag{32}$$

dove

$$n(E, r, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{\overline{x^2}}} Q(1+R) \exp\left[-\frac{1}{2}\frac{r^2}{\overline{x^2}}\right] \Pi(E_s, 0, t) = \tag{33}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} Q(1+R) \frac{E}{\delta_e} \exp\left[-\frac{1}{2}\frac{r^2 E^2}{\delta_e^2}\right] \Pi(E_s, 0, t)\,,$$

$$r_M = \frac{0{,}245}{E_M}\,,$$

ed eseguiamo due integrazioni per parti:

$$N(t, r) = N(t, r_M) + \Pi(E_p, E_M, t_a) n(E_M, r, t) + \tag{34}$$

$$+ \Phi(E_p, E_M, t_a) \frac{\partial n(E_M, r, t)}{\partial E} + \int_{E_M}^{\infty} \Phi(E_p, E, t_a) \frac{\partial^2 n}{\partial E^2} \mathrm{d}E\,,$$

dove

$$\begin{cases} \Pi(E_p, E, t) = \displaystyle\int_{E}^{\infty} \pi(E_p, E, t)\,, \\ \Phi(E_p, E, t) = \displaystyle\int_{E}^{\infty} \Pi(E_p, E, t)\, \mathrm{d}E\,. \end{cases} \tag{35}$$

Ora secondo SNYDER (23) si ha

$$\Pi(E_p, E, t) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\sigma + \mu}{\mu - \nu} \exp[\mu t] \left(\frac{E_p}{E}\right)^s \frac{\mathrm{d}s}{s}\,, \tag{36}$$

che integrata rispetto ad E dà

$$\Phi(E_p, E, t) = \frac{E_p}{2\pi i} \int \frac{\sigma + \mu}{\mu - \nu} \exp[\mu t] \left(\frac{E_p}{E}\right)^{s-1} \frac{\mathrm{d}s}{s(s-1)}\,, \tag{37}$$

dove σ e μ sono i ben noti esponenti che figurano nella teoria degli sciami.

---

(23) H. S. SNEIDER: *Phys. Rev.*, **53**, 960 (1938).

Lo spirito del procedimento è il seguente: per il calcolo della (34) serve conoscere la $\Pi(E_p, E, t)$ per $E = E_M$ e solo la $\Phi(E_p, E, t)$ per $E > E_M$. Ora, se si calcola la (37) a mezzo del metodo del punto di sella, si trova che il valore di s corrispondente alla sella è più grande, grazie al fattore $s - 1$ che figura al denominatore della (37), di quello che si dedurrebbe applicando lo stesso procedimento alla (36). Ora più alto è il valore di s e più piccolo è il corrispondente valore di

$$y_p - y = \ln \frac{E_p}{E} .$$

Ripetendo l'integrazione per parti più di due volte si otterrebbero espressioni sempre più convenienti, in cui, cioè, il metodo del punto di sella è applicabile assai bene anche per valori di E molto vicini ad E_p. Noi ci siamo però limitati a due integrazioni per parti poichè, come vedremo, già in questo modo siamo in grado di calcolare la porzione dello sciame in questione ($E \geqslant E_M$) con precisione sufficiente per i nostri scopi.

Nella appendice 2 diamo i calcoli di Φ con il metodo del punto di sella, i cui risultati sono riportati nella tabella III dell'appendice stessa.

Derivando la (33) una e due volte si ha

$$(38) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial E} &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\frac{r^2}{\delta_e^2}E^2\right] \varphi(E) Q(1+R) , \\ \frac{\partial^2 n}{\partial E^2} &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\frac{r^2}{\delta_e^2}E^2\right] \left\{-\frac{r^2}{\delta_e^2}E\varphi(E) + \varphi'(E)\right\} \cdot Q(1+R) , \end{aligned} \right.$$

ove si è considerato il fattore correttivo $Q(1+R)$ (fig. 8) come costante, e si è posto

$$(39) \quad \left\{ \begin{aligned} \varphi &= \frac{1}{\delta_e}\left\{\Pi(E_s, 0, t)\left[1 - \frac{r^2}{\delta_e^2}E^2\right] + \frac{\partial \Pi(E_s, 0, t)}{\partial y_s}\right\} , \\ \varphi' &= \frac{1}{\delta_e}\left\{\frac{1}{E}\frac{\partial \Pi(E_s, 0, t)}{\partial y_s}\left[1 - \frac{r^2}{\delta_e^2}E^2\right] + \frac{1}{E}\frac{\partial^2 \Pi(E_s, 0, t)}{\partial y_s^2} - 2\frac{r^2}{\delta_e^2}E\Pi(E_s, 0, t)\right\} . \end{aligned} \right.$$

Il calcolo di $N(t, r)$ a mezzo della (34), (38) e (39) per r diverso da 0 è piuttosto complicato; per $r = 0$, invece, le (33) e (38) si riducono semplicecemente a

$$(40) \quad \left\{ \begin{aligned} n(E_M, 0, t) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{E_M}{\delta_e} \Pi(E_{sM}, 0, t) Q(1+R) , \\ \frac{\partial n(E_M, 0, t)}{\partial E} &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\delta_e} \left\{\Pi(E_{sM}, 0, t) + \frac{\partial \Pi}{\partial y_s}\right\} Q(1+R) , \\ \frac{\partial^2 n(E_M, 0, t)}{\partial E^2} &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\delta_e} \frac{1}{E} \left\{\frac{\partial \Pi}{\partial y_s} + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y_s^2}\right\} Q(1+R) . \end{aligned} \right.$$

A mezzo delle (34) e (40) abbiamo calcolato

$$N(t, 0) - N(t, r_M)\,, \tag{41}$$

che, aggiunto ad $N(t, r_M)$ quale risulta dalla (30) e (31), ci fornisce il valore di $N(t, r)$ sull'asse dello sciame.

Nella fig. 9 sono riprodotte le curve di $N(t, r)/2\pi r$ calcolate per $y_v = 10$, 12, 14, 16, $t_a = 13$, 15, 17 e per $t = 0$, 4,8 e 9,6.

Da tali curve si riconosce che r_M è sempre molto piccolo e che $N(t, 0) - N(t, r_M)$ è sempre piccolo rispetto a $N(t, r_M)$ salvo che per $y = 10$. Ne segue che anche un errore apprezzabile nella (41) non porta gravi conseguenze sul risultato finale; e che fra $r = r_M$ ed $r = 0$ possiamo interpolare la $N(t, r)$ graficamente.

Per $y_v = 10$ abbiamo calcolato la $N(t, r)$ per alcuni valori di r compresi fra 0 ed r_M servendoci ancora una volta dell'approssimazione rappresentata dalle (12) e (13), ossia del fatto che a distanza t ci sono solo quegli elettroni che hanno energia inferiore a $0{,}245/r$.

5, 4. – *Le dimensioni finite delle camere di ionizzazione.*

In vicinanza dell'asse dello sciame ove $N(t, r)$ varia assai rapidamente con r è necessario tener conto delle dimensioni delle camere di ionizzazione impiegate nelle misure; ossia è necessario calcolare il numero di particelle

$$A(t, r) = \int_a \frac{N(t, r)}{2\pi r}\, \mathrm{d}a\,, \tag{42}$$

che attraversano l'area a di una camera di ionizzazione; nella (42) $\mathrm{d}a$ è l'elemento di area (espresso in unità X_0^2).

Purtroppo la sezione orizzontale delle nostre camere è un rettangolo alquanto allungato ($a = 92 \times 7{,}8$ cm² $= 720$ cm², $3{,}46 \cdot 10^{-2}\, X_0^2$) e quindi, a rigore, $A(t, r)$ verrebbe a dipendere anche dall'orientamento della camera rispetto alla congiungente il suo centro con l'asse dello sciame. Noi però non abbiamo tenuto conto di questo fatto ed abbiamo assimilato la sezione delle nostre camere ad un cerchio di area a per $r = 0$

$$A(t, 0) = \int_0^{r_c} N(t, r)\, \mathrm{d}r\,, \qquad r_c = \sqrt{\frac{a}{\pi}} = 3{,}31 \cdot 10^{-4}\, X_0\,,$$

e ad un rettangolo per $r \neq 0$

$$A(t, r) = l_c \int_{r - l_c/2}^{r + l_c/2} \frac{N(t, r)}{2\pi r}\, \mathrm{d}r\,, \qquad l_c = \sqrt{a} = 5{,}88 \cdot 10^{-4}\, X_0\,.$$

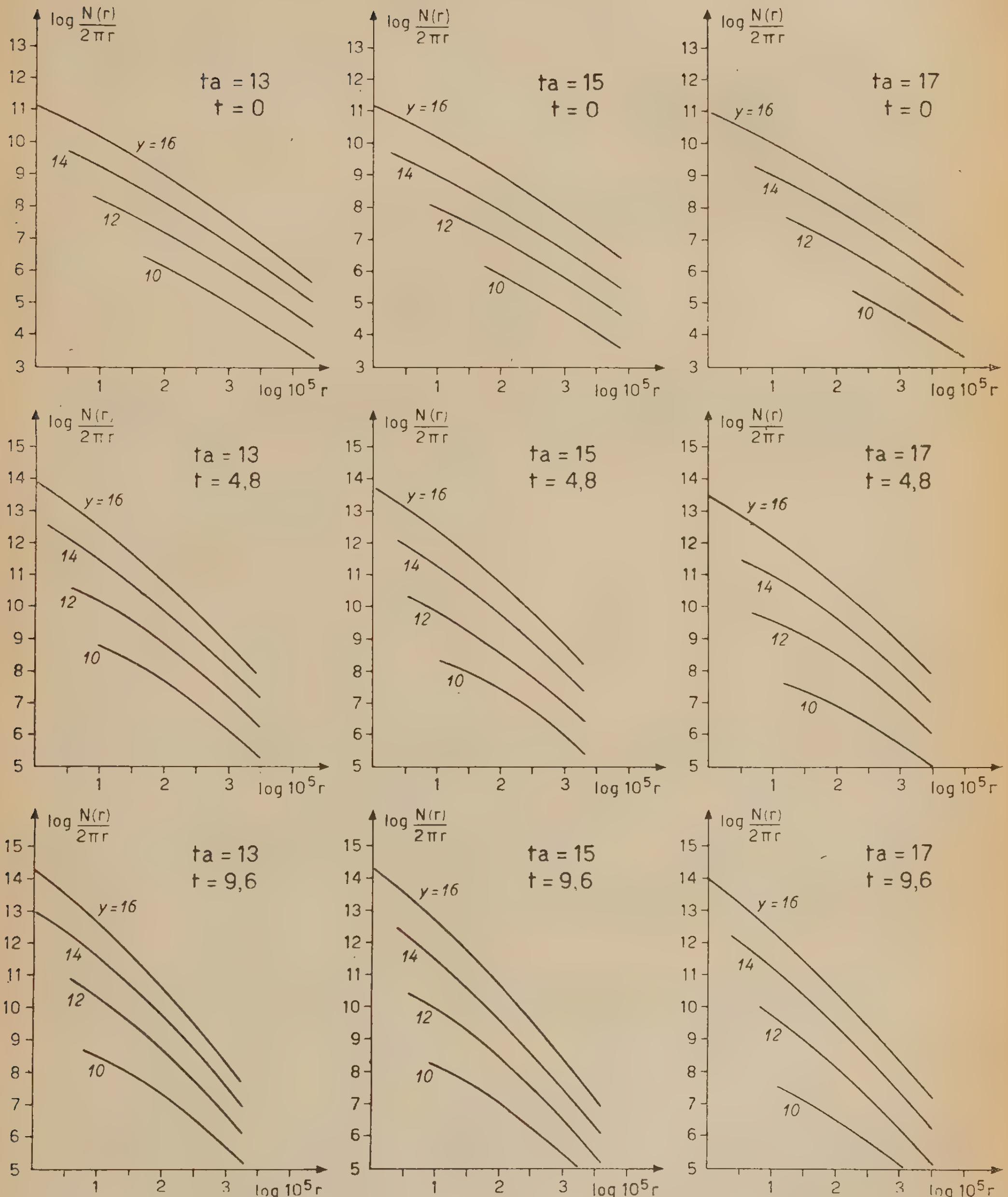

log $\frac{N(r)}{2\pi r}$
ta = 13
t = 0
y = 16
14
12
10
log 10^5r
ta = 15
t = 0
ta = 17
t = 0
ta = 13
t = 4,8
ta = 15
t = 4,8
ta = 17
t = 4,8
ta = 13
t = 9,6
ta = 15
t = 9,6
ta = 17
t = 9,6

Fig. 9.

Tale operazione di integrazione ha una importanza non trascurabile finchè $r \gtrless l_c$; mentre già per $r = 5 \cdot 10^{-3}\, X_0$ si può porre

$$A(t, r) = a\,\frac{N(t, r)}{2\pi r}\,.$$

A titolo di esempio nella fig. 10 sono riportati in scala logaritmica le $A(t, r)$ per $t = 0$, $t = 4{,}8$, $t = 9{,}6$.

5, 5. – *Calcolo delle frequenze* P_Q, P_{Q+3}, P_{Q+4}.

Ci proponiamo ora di calcolare le seguenti frequenze:

$$(43)\qquad \left\{\begin{array}{l} P_q = P_Q + P_{Q+3} + P_{Q+4}\,, \\ P_{q+3} = P_{Q+3} + P_{Q+4}\,, \\ P_{q+4} = P_{Q+4}\,, \end{array}\right.$$

il cui significato è evidente: P_q è la frequenza delle coincidenze quadruple fra le 4 camere sia in coincidenza che non in coincidenza con i contatori; P_{q+3} è la frequenza delle coincidenze fra le 4 camere e almeno i tre mazzi di contatori a, b, c; la lettera maiuscola sta ad indicare che si tratta di frequenze integrali ossia di tutti gli eventi corrispondenti ad impulsi di ampiezza superiore ad un valore prefissato A_t; le corrispondenti frequenze differenziali verranno indicate con p_q, p_{q+3} e p_{q+4}. Una volta note le P_{q+i} ($i = 0, 3, 4$) a mezzo della (43) potremo passare alle P_{Q+i} misurate sperimentalmente. Facciamo anzi notare subito che nello scrivere la prima delle (43) si suppone tacitamente che le P_Q siano dovute *solo* a sciami estesi; ciò significa supporre di poter trascurare gli eventi locali ossia gli eventi del tipo a) del n. 4-Q. Questo punto verrà discusso nel n. 6.

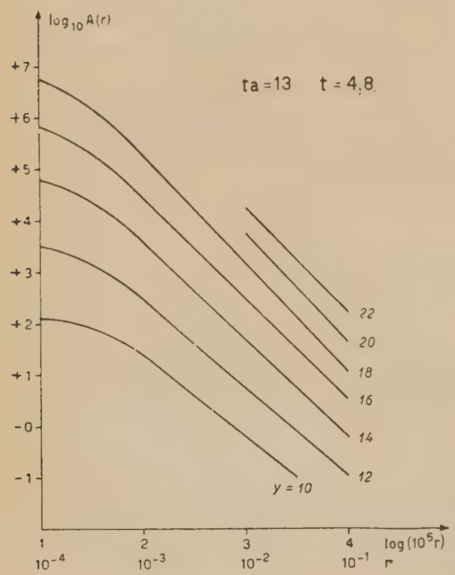


Fig. 10.

Indicando con $s(y_p, t_a)\,\mathrm{d}y_p$ il numero di sciami a cascata elettronica iniziati da un elettrone di energia compresa fra y_p e $y_p + \mathrm{d}y_p$ ad una altezza t_a al di sopra della stazione di osservazione si ha evidentemente che la frequenza osservata degli eventi q (dovuti a sciami nati ad altezza t_a) di ampiezza fra A_t e $A_t + \mathrm{d}A_t$ è data dalla espressione

$$(44)\qquad p_q(A_t)\,\mathrm{d}A_t = \int s(y_p, t_a)\,\mathrm{d}y_p\, 2\pi r\,\mathrm{d}r\,,$$

ove l'integrale va esteso al luogo dei punti del piano y_p, r ove si ha

$$A_t(y_p, r) = \text{cost.}\, E\,. \tag{45}$$

La (45) è stata da noi calcolata nei numeri precedenti ed è, in parte, rappresentata nella fig. 10.

Sostituendo alle variabili y_p ed r le variabili y_p ed A_t la (44) diventa

$$p_q(A_t)\,\mathrm{d}A_t = \mathrm{d}A_t \int s(y_p, t_a) 2\pi r \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}A_t}\,\mathrm{d}y_p = -\,\mathrm{d}A_t \frac{\mathrm{d}P_q(A_t)}{\mathrm{d}A_t}\,, \tag{46}$$

avendo indicato con

$$P_q(A_t) = \int_{y_{min}}^{\infty} s(y_p, t_a)\pi r^2\,\mathrm{d}y_p\,, \tag{47}$$

lo spettro integrale degli impulsi; y_{min} è quel valore di y_p per cui $\pi r^2 = 0$.

Per il calcolo di $p_{q+3}(A_t)\,\mathrm{d}A_t$ ricordiamo che la probabilità che i contatori a, b, c, di area S siano scaricati contemporaneamente è dato dalla nota espressione

$$p_3(A_0') = \left(1 - \exp\left[-\frac{S}{a}A_0'\right]\right)^3, \tag{48}$$

dove con A_0' si è indicata l'ampiezza dell'impulso che si avrebbe in una delle nostre camere (di area a) nell'aria; l'apice è stato aggiunto per tener conto del fatto che in un piano orizzontale i contatori a, b, c, sono spostati di un tratto d rispetto al centro delle camere. La loro distanza r' è quindi diversa dalla distanza r a cui si trovano le camere C dall'asse dello sciame (fig. 11); ed anzi essa è diversa per ciascuno dei tre mazzi di contatori a, b, c.

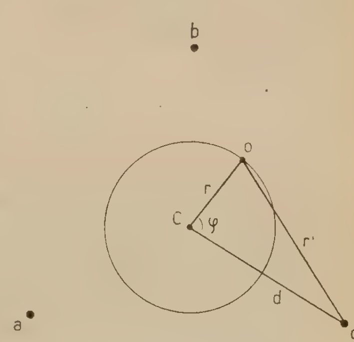


Fig. 11.

Allo scopo di non complicare eccessivamente le cose noi assumiamo per r il suo valore quadratico medio

$$r' = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int (r^2 + d^2 - 2rd\cos\varphi)\,\mathrm{d}y} = \sqrt{r^2 + d^2}\,. \tag{49}$$

Una volta fissato il valore di r' che corrisponde ad un ben determinato valore di r è chiaro che nella (48) andrà introdotto quel valore

$$A_0' = A_0(y_p, r')\,, \tag{50}$$

che corrisponde al valore prefissato di y_p. Chiarito questo punto si ha evidentemente

$$p_{q+3}(A_t)\,\mathrm{d}A_t = \int s(y_p, t_a)\,\mathrm{d}y_p \cdot 2\pi r\,\mathrm{d}r\, p_3(A_0') = \mathrm{d}A_t \int s(y_p, t_a)\frac{\mathrm{d}\pi r^2}{\mathrm{d}A_t}\, p_3(A_0')\,\mathrm{d}y_p\;;$$

$$P_{q+3}(A_t) = -\int_{A_t}^{\infty} p_{q+3}(A_t)\,\mathrm{d}A_t = -\int_{y_{min}}^{\infty} s(y_p; t_a)\int_{A_t(y_p)}^{\infty}\frac{\mathrm{d}\pi r^2}{\mathrm{d}A_t}\, p_3(A_0')\,\mathrm{d}A_t\,.$$

Integrando per parti si ottiene

$$P_{q+3}(A_t) = \int_{y_{min}}^{\infty} s(y_p, t_a)\,\mathrm{d}y_p \left\{\pi r^2 p_3(A_0') + \int_{A_0'}^{\infty} \pi r^2 \frac{\mathrm{d}p_3}{\mathrm{d}A_0'}\,\mathrm{d}A_0'\right\}, \tag{51}$$

dove A_0' e è legato ad A_t a mezzo delle (45), (49) e (50); ossia fissato y_p la (45) determina per ogni valore di A_t un corrispondente r il quale, introdotto nella (49), dà un r'; questo, insieme ad y_p, permette di calcolare A_0' a mezzo della (50).

Il calcolo della $P_{q+4}(A_t)$ si fa nello stesso modo solo che invece di $p_3(A_0')$ si deve usare

$$p_4(A_0') = p_3(A_0')\left(1 - \exp\left[-\frac{s}{a}A_0\right]\right), \tag{52}$$

dove s è l'area del contatore d. Nel secondo fattore che figura nella (52) si è posto A_0 e non A_0' dato che il contatore d occupa, in un piano orizzontale quasi esattamente la stessa posizione delle camere di ionizzazione; in altre parole per il contatore d si può ammettere $r' \cong r$.

Allo scopo di poter sviluppare i calcoli è ora necessario specificare la funzione $s(y_p, t_a)$.

Si sa oggi che lo spettro dei corpuscoli primari, prevalentemente protoni, che cadono isotropicamente al limite dell'atmosfera, è del tipo

$$I(E)\,\mathrm{d}E = \frac{K}{E^n}\,\mathrm{d}E\,, \tag{53}$$

dove n è certamente compreso fra 2,5 e 2,7; si sa inoltre che l'intensità totale è

$$\int_{E_{min}}^{\infty} I(E)\,\mathrm{d}E = 0{,}1\ \text{particelle/cm}^2\times\text{s}\times\text{sterad}\,, \tag{54}$$

dove per E_{min} si può prendere il taglio del campo magnetico terrestre: in direzione verticale e alla latitudine del L.T.G. (45° 56′ 05″ N) $\sim 2{,}5\cdot 10^9$ eV.

Come poi questi primari vengano assorbiti nell'atmosfera dando luogo a vari processi, fra cui la generazione degli sciami estesi, è una questione ancora aperta ed anzi una delle questioni più importanti. Noi faremo le seguenti ipo-

tesi di lavoro le quali, del resto, sono in qualche modo imposte dal tipo stesso di calcoli svolti in questo lavoro:

1) l'assorbimento dei primari avviene con legge esponenziale in maniera tale che il loro spettro conserva la forma (53) anche nei primi metri d'acqua equivalente dell'atmosfera;

2) il numero di sciami che hanno origine fra t_a e $t_a + \mathrm{d}t_a$ è proporzionale al numero di primari che giungono a quella altezza;

3) lo sciame è iniziato da un solo elettrone la cui energia è uguale a quella del primario corrispondente.

Rimandando al n. 6, 2 per una discussione di queste ipotesi, si ha evidentemente

$$s(y_p, t_a)\,\mathrm{d}y_p = \omega I(y_p)\,\mathrm{d}y_p \exp\left[-\frac{t_0 - t_a}{\Lambda}\right]\frac{\mathrm{d}t_a}{\Lambda_{sc}}, \tag{55}$$

ove t_0 è la profondità della stazione di osservazione dal limite della atmosfera, Λ il cammino libero per assorbimento dei primari, Λ_{sc} il cammino libero per produzione di sciami; ω l'angolo solido, attorno alla verticale entro cui i primari possono produrre sciami estesi osservabili a 3 500 m s.l.m.

Noi poniamo

$$s(y_p, t_a)\,\mathrm{d}y_p = \mathcal{S}(y_p)\,\mathrm{d}y_p \exp\left[-\frac{t_0 - t_a}{\Lambda}\right]\frac{\mathrm{d}t_a}{\Lambda_{se}}, \tag{56}$$

$$\mathcal{S}(y_p)\,\mathrm{d}y_p = \omega k\frac{\mathrm{d}E_p}{E_p^n} = \omega K \exp\left[-(n-1)y_p\right]\mathrm{d}y_p\,, \tag{57}$$

$\omega = 0{,}1$, come è suggerito dal fatto che gli sciami estesi hanno quasi tutti l'asse che forma un angolo inferiore a 30° con la verticale (1) ed abbiamo determinato K in base alla (54) per diversi valori di n: i valori numerici di ωK così ottenuti, sono riprodotti nella tabella VII avendo preso come unità di superficie $X_0^2 = 2{,}09 \cdot 10$ cm² e come unità di tempo l'ora.

Introducendo la (57) nella (47) e (51) abbiamo potuto calcolare le P_q, P_{q+3} e P_{q+4} a meno del fattore

$$\exp\left[-\frac{t_0 - t_a}{\Lambda}\right]\frac{\mathrm{d}t_a}{\Lambda_{sc}} \tag{58}$$

e della corrispondente integrazione rispetto a t_a. I calcoli sono stati eseguiti per $n = 2{,}5$; $2{,}6$; $2{,}7$; $t = 4{,}8$ e $9{,}6$, $t_a = 17$, 15, 13, salvo che per la P_{q+4} che è stata calcolata per gli stessi valori di n ma solo per $t = 4{,}8$ e $t_a = 13$. Come esempio riportiamo nella fig. 12, in grafico doppiamente logaritmico, i risultati ottenuti per $t_a = 13$ e $t = 4{,}8$.

Come si vede da tale figura mentre P_q può essere rappresentato con una formula del tipo

$$P_q = \frac{u}{A^\gamma}, \tag{59}$$

entro un vasto intervallo di ampiezze degli impulsi, P_{q+3} e P_{q+4} si scostano nettamente da questo andamento, ed ha quindi un senso parlare del corri-

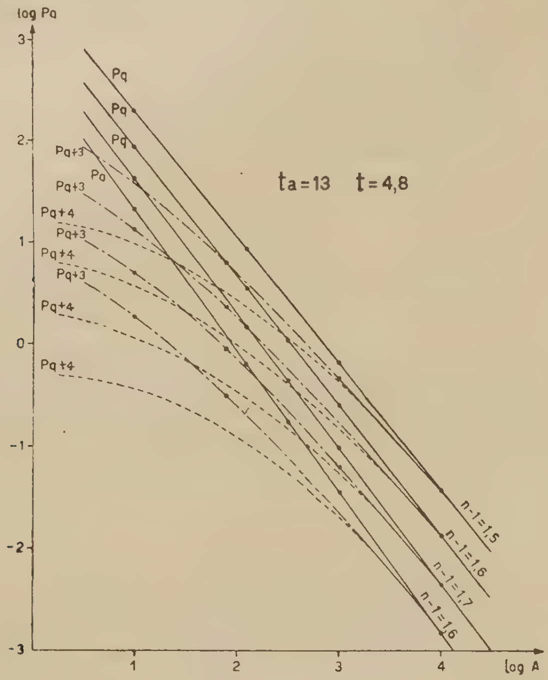


Fig. 12.

spondente γ solo se ci si riferisce ad un assai stretto intervallo di densità quale è, del resto, quello a cui si estendono le nostre misure. Una analoga osservazione si può fare per la

$$P_Q = P_q - P_{q+3} .$$

Nelle tabelle VIII e IX riproduciamo rispettivamente i valori delle P, per $A_t = 105$ ($\Delta = 1\,500$ particelle/m²), e dei corrispondenti γ, quali risultano dai nostri calcoli in funzione di t_a, t ed n.

6. – Discussione dei risultati dei calcoli e confronto con l'esperienza.

6, 1. – *Confronto della legge di distribuzione usata con altre leggi.*

Prima di discutere i risultati dell'esperienza in base ai nostri calcoli, vogliamo confrontare le conclusioni che si deducono dall'ipotesi del « numero gaussiano » con quelle che si deducono dall'ipotesi della « densità gaussiana ».

TABELLA VIII.

t_a	t	P_a			P_{a+3}			$P_a - P_{a+3}$		
		$n-1=1{,}5$	1,6	1,7	1,5	1,6	1,7	1,5	1,6	1,7
17	4,8	3,90	1,75	0,52	2,37	0,80	0,30	1,53	0,95	0,22
	9,6	2,14	0,79	0,32	1,14	0,37	0,14	1,00	0,42	0,18
15	4,8	6,15	2,40	1,00	2,84	1,00	0,37	3,31	1,40	0,63
	9,6	3,00	1,05	0,45	1,32	0,49	0,16	1,68	0,56	0,29
13	4,8	10,00	4,00	1,74	4,47	1,65	0,63	5,53	2,35	1,11
	9,6	5,40	2,24	0,98	2,10	0,70	0,30	3,30	1,74	0,68

TABELLA IX.

t_a	t	γ_a $(1 \leqslant \log A \leqslant 3)$			γ_{a+3} $(2 \leqslant \log A \leqslant 3)$			$\gamma_{a-(a+3)}$ $(1 \leqslant \log A \leqslant 3)$		
		$n-1=1{,}5$	1,6	1,7	1,5	1,6	1,7	1,5	1,6	1,7
17	4,8	1,22	1,25	1,32	1,07	1,07	1,10	1,37	1,47	1,51
	9,6	1,10	1,15	1,19	0,95	0,95	0,97	1,30	1,34	1,35
15	4,8	1,20	1,23	1,27	1,02	1,02	1,02	1,32	1,35	1,38
	9,6	1,04	1,08	1,12	0,93	0,93	0,93	1,23	1,24	1,25
13	4,8	1,23	1,27	1,31	0,78	0,78	0,78	1,40	1,41	1,42
	9,6	1,07	1,08	1,13	0,92	0,92	0,92	1,16	1,17	1,22

Secondo questa ultima ipotesi la (6) andrebbe sostituita dalla espressione

$$\pi(E_p, E, t_a)\,\mathrm{d}E\,\frac{2}{\overline{x^2}}\exp\left[-\frac{r^2}{\overline{x^2}}\right] r\,\mathrm{d}r\,, \tag{60}$$

nella quale il fattore di normalizzazione e l'esponente sono stati determinati imponendo le seguenti condizioni: integrando rispetto ad r si deve ottenere $\pi(E_p, E, t_a)$ e lo scarto quadratico medio relativo ad elettroni di una ben determinata energia deve essere uguale al valore prefissato $\overline{x^2}$.

Con questa ipotesi la (8) diventa

$$N_e(t, r)\,\mathrm{d}r = \mathrm{d}r \int_0^{E_p} \pi(E_p, E, t_a)\,\frac{2}{\sqrt{\overline{x^2}}}\,\frac{1}{\sqrt{\overline{x^2}}}\exp\left[-\frac{r^2}{\overline{x^2}}\right] r\Pi(E_s, 0, t)\,\mathrm{d}E\,,$$

che potremo anche scrivere, tenendo conto delle (10),

$$N_e(t, r)\,\mathrm{d}r = r\,\mathrm{d}r\,\frac{2}{\delta_e}\int\limits_0^{E_p} \pi(E_p, E, t_a)\,\frac{1}{\sqrt{\overline{x^2}}}\exp\left[-\frac{r^2}{\overline{x^2}}\right] E\Pi(E_s, 0, t)\,\mathrm{d}E\,. \tag{61}$$

Questa differisce dalla (8) principalmente in quanto contiene oltre al fattore r, un fattore E sotto il segno di integrale. Ora è evidente che fissato un valore di r contribuiscono all'integrale principalmente i più elevati valori di E per cui il fattore gaussiano è sensibilmente diverso da zero, ossia quei valori per cui $E \sim \delta_e/r$.

Ne segue che l'errore che si commette sostituendo ad E il valore costante δ_e/r non è certo grande; ma così facendo la (61) si riduce quasi uguale alla (8) come si riconosce facilmente considerando anche i fattori numerici che figurano in queste espressioni.

Tale ragionamento si può estendere fino a distanze r dall'asse molto piccole purchè lo spettro delle energie si estenda fino ad infinito. Ma se lo spettro va a zero per un valore finito di $E \leqslant E_p$, come noi abbiamo fatto nel n. 5, 3, il fattore r non è più compensato dal fattore E e quindi per $r = 0$ N_e va a zero nel caso della « densità gaussiana » ma non nel caso del « numero gaussiano ».

Queste considerazioni qualitative si possono assai facilmente completare con un calcolo numerico: si vede infatti che, una volta note le tabelle relative alle varie espressioni dedotte nel n. 5, si possono ottenere con assai poco lavoro, i risultati numerici corrispondenti alla (61) e alle altre formule che da essa si deducono con gli stessi procedimenti esposti in quel numero.

Si trova in tal modo che se ci si limita a considerare una funzione di struttura dello sciame indipendente dalla energia del primario, i risultati che si ottengono nell'ipotesi della « densità gaussiana » sono praticamente identici con quelli che si ottengono nell'ipotesi del « numero gaussiano ». Una differenza fra le due distribuzioni si manifesta invece se si tiene conto del valore finito dell'energia del primario, come si è fatto nel n. 5, 3. La differenza anche in questo caso, non è grande. A titolo di esempio nella fig. 13 riproduciamo, in grafico doppiamente logaritmico, la grandezza $N(r)/2\pi r$ quale si deduce nelle due diverse ipotesi (curva piena « densità gaussiana »: curve tratteggiate « numero gaussiano ») per $t_a = 15$ e $y = 12,\ 14,\ 16$.

Se ora partendo dalle curve tratteggiate anzichè da quelle piene, si eseguono i calcoli esposti nei nn. 5, 4 e 5, 5 si trovano alla fine dei risultati sostanzialmente uguali a quelli ottenuti partendo dalle curve a tratto pieno.

In conclusione l'ipotesi del « numero gaussiano » purchè si tenga conto dell'energia finita del primario dà luogo ad una concentrazione di elettroni (e fotoni) in vicinanza dell'asse dello sciame, maggiore di quella dedotta dal-

l'ipotesi della « densità gaussiana »; la differenza però non è tale da cambiare sensibilmente i risultati dei calcoli degli eventi osservati.

Ci si può ora domandare se un analogo calcolo eseguito partendo da formule del tipo di quella di Molière possa dare un risultato molto diverso. A noi sembra che ciò si possa escludere in quanto (a parte le difficoltà inerenti allo spettro totale impiegato da MOLIÈRE) la sua densità degli elettroni di una ben

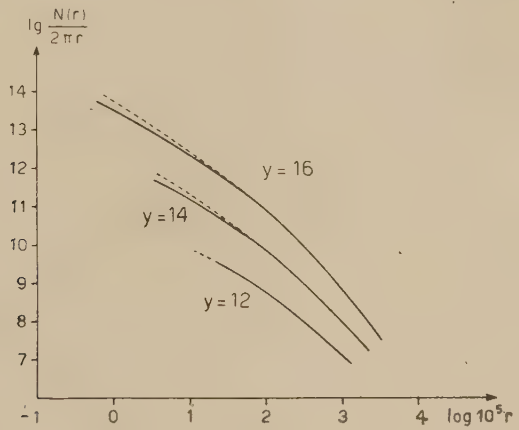


Fig. 13.

determinata energia, in vicinanza dell'asse, presenta un comportamento intermedio fra quelli relativi alle due leggi di distribuzione da noi considerate, mentre la sua densità dei fotoni di una ben determinata energia si comporta in vicinanza dell'asse nello stesso modo della corrispondente densità dedotta sotto l'ipotesi del « numero gaussiano ». In conclusione una legge di distribuzione come quella di Molière in vicinanza dell'asse ha un comportamento intermedio fra quelli dedotti dalle due ipotesi da noi usate, risultando assai più vicino a quello relativo all'ipotesi del « numero gaussiano ».

Del resto è facile verificare che per r compreso fra 0,02 e 0,2 la curva del numero di elettroni di energia tra r ed $r + \mathrm{d}r$ nell'aria data da MOLIÈRE [3] si sovrappone con la nostra $P_e(r, 0)$ entro gli errori di lettura del grafico.

Ci si può ora domandare se la legge di distribuzione alle grandi distanze dall'asse possa avere una notevole influenza sui risultati.

Come risulta dal sopra citato lavoro di NORDHEIM e collaboratori [13] le distribuzioni da noi usate hanno meno coda di quella di MOLIÈRE e questa ne ha meno di quelle dedotte da questi autori. In altre parole la nostra legge di distribuzione ha una maggiore concentrazione in vicinanza dell'asse. Alla fine del n. 6, 3 mostreremo, con un argomento che verrà precisato e completato in II, in qual verso agisca questo errore.

6, 2. – *Altezza di produzione degli sciami osservati.*

Passiamo alla discussione delle frequenze calcolate per i diversi tipi di eventi e raccolte nella tabella VIII.

Da questa tabella si vede che le frequenze calcolate vengono a dipendere fortemente sia dall'esponente n dello spettro dei primari che dalla altezza di generazione t_a dello sciame al di sopra della stazione di osservazione, pur mantenendosi sempre del giusto ordine di grandezza. In particolare si ottiene un discreto accordo con i risultati della esperienza (tabella I) se si prende $n = 2,5$ e $t_a = 15$.

In realtà però bisognerebbe moltiplicare le P per il fattore (58) e integrare rispetto a t_a da 0 (stazione di osservazione) al limite della atmosfera t_0 ($= 675$ g/cm²).

$$\int_0^{t_0} \exp\left[-\frac{t_0 - t_a}{\Lambda}\right] P_q(t_a)\,\mathrm{d}t_a\,. \tag{62}$$

Se si procedesse in questo modo prendendo per Λ un cammino libero medio dell'ordine di 120-140 g/cm², quale viene suggerito dalla maggior parte dei risultati sulla variazione in funzione dell'altezza di tutti quei fenomeni che nella radiazione cosmica vengono usualmente attribuiti alla componente nucleonica, si troverebbe che l'integrando della (62) è pressochè costante. Ciò significherebbe che agli sciami estesi che si osservano a 3 500 m s.l.m. contribuirebbero non solo quelli generati negli strati più alti della atmosfera ma anche quelli prodotti poche unità di radiazione al di sopra della stazione di osservazione. È da notare che questa circostanza non è una caratteristica specifica dei nostri calcoli, ma una conseguenza del tutto generale del fatto che il coefficiente di variazione degli sciami estesi in funzione dell'altezza, quale risulta sia da numerose misure, per esempio quelle di HILBERRY [24], sia dalla teoria a cascata elettronica unidimensionale, è prossimo a 140 g/cm².

Se così fosse una buona parte degli sciami osservati non avrebbe ancora raggiunto il suo massimo sviluppo alla quota ove vengono osservati, e quindi non sarebbe più soddisfatta una delle ipotesi essenziali poste a base sia di questi calcoli che di tutti gli altri fino ad ora pubblicati sulla teoria degli sciami estesi a cascata elettronica. Prima del massimo infatti sia lo spettro che l'apertura laterale dello sciame sono evidentemente assai diversi che dopo il massimo stesso.

La scelta del valore da attribuire a Λ va però fatta dopo aver discusso le ipotesi da noi introdotte sulla generazione degli sciami estesi da parte della primaria (n. 5, 6). Di queste la più drastica è senza alcun dubbio la terza,

---

([24]) N. HILBERRY: *Phys. Rev.*, **60**, 1 (1941).

la quale, presa alla lettera, si scosta assai notevolmente da tutti i meccanismi oggi presi in considerazione per spiegare la produzione di sciami estesi da parte della primaria. Uno dei meccanismi più accreditati è che un nucleone veloce urtando contro un nucleo dell'aria generi più mesoni, alcuni dei quali neutri: questi ultimi si trasformano istantaneamente in quanti γ che iniziano lo sciame a cascata. Senza entrare nei dettagli di questo meccanismo è chiaro che si possono distinguere vari casi fra i quali consideriamo i due seguenti esempi estremi:

1) Nel processo di generazione dei quanti γ (sia pure attraverso i neutretti) una gran parte della energia del nucleone incidente viene trasferita ai mesoni prodotti, per modo che i nucleoni che emergono dal primo urto non sono più in grado o quasi di produrre altri processi confrontabili con il primo.

Per esempio se un nucleone di 10^{14} eV urta contro un nucleone fermo e dopo l'urto essi rimangono entrambi fermi nel sistema del loro baricentro, ciascuno di essi possederà, dopo l'urto, una energia di $2{,}23 \cdot 10^{11}$ eV nel sistema del laboratorio e non sarà quindi più in grado di dar luogo a processi confrontabili con quelli relativi al primo urto. A parte la verosimiglianza o meno di un simile caso estremo è chiaro che nel primo urto (avente evidentemente un carattere catastrofico) si avrà l'emissione di un grandissimo numero di mesoni dei quali grosso modo 1/3 saranno neutri, e daranno inizio allo sciame a cascata. In questo caso l'inizio dello sciame come cascata elettronica si può pensare localizzato in un tratto dell'ordine di uno o al massimo due cammini liberi Λ_{sc} per produzione di sciami e il suo sviluppo attraverso all'atmosfera avrebbe essenzialmente il carattere della cascata elettronica (o meglio della sovrapposizione di un gran numero di cascate elettroniche aventi tutte all'incirca il proprio inizio alla stessa quota).

2) Nel processo di generazione dei quanti γ una parte abbastanza piccola (per esempio 1/4) dell'energia del nucleone incidente viene trasferita ai mesoni (carichi e neutri) per modo che i nucleoni che emergono dal primo urto sono ancora in grado di subirne molti altri sostanzialmente simili al primo.

Lo sciame allora ha una struttura ben diversa da una cascata elettronica specialmente nelle vicinanze dell'asse ove scarseggiano gli elettroni di energia elevatissima quali sono quelli che alimentano lo sciame a cascata elettronica attraverso a spessori di 15-20 unità di radiazione.

Nel primo caso invece dato che i quanti γ e i loro elettroni discendenti di prima generazione avrebbero tutti quasi esattamente la stessa direzione, si avrebbe sostanzialmente una cascata elettronica generata anzichè da un solo elettrone di energia E_p da un gran numero di quanti γ di energie variabili probabilmente entro vasti limiti ma tale che la loro energia totale corrisponde grosso modo a $E_p/3$.

È comunque chiaro che sia in un caso che nell'altro lo sciame ha inizio quando il primario subisce il primo urto con generazione di quanti γ o elettroni. Ne segue che nella (62) si deve prendere per Λ non il cammino corrispondente

all'assorbimento della nucleonica ma quello corrispondente alla produzione di sciami Λ_{sc}. Questo non è noto e tanto meno è nota la sua dipendenza dalla energia del primario la quale potrebbe dar luogo a complicazioni non indifferenti. Probabilmente però non si commette un grave errore se si prende Λ_{sc} dell'ordine di quello corrispondente alla sezione d'urto geometrica, ossia in aria $\Lambda_{sc} = 60$ g/cm². In questo modo l'integrando della (62) decresce man mano che ci si sprofonda nell'atmosfera seguendo all'incirca una legge esponenziale di cammino libero medio dell'ordine di 100 g/cm² riducendosi così per $t_a = 13\ X_0$ a circa il 10 % del suo valore al limite dell'atmosfera.

Da questa discussione sembra che si debba concludere che, se è vera la prima delle due possibilità osservate, la maggior parte degli sciami estesi nasce abbastanza in alto da aver già raggiunto il loro massimo a 3 500 m s.l.m.; come vedremo per densità molto alte questa condizione comincia a non essere più soddisfatta proprio attorno a $t_a = 13$.

I risultati della integrazione rispetto a t_a sono raccolti nella tabella X. Come si vede le intensità assolute sono tutte un poco più basse di quelle sperimentali ma è evidente che non si può dare alcun peso a tale discrepanza data l'incertezza di molti dei fattori che influenzano il valore dell'intensità assoluta. Comunque la minor discordanza si ottiene per $n \sim 2{,}5$. Ma se invece della prima fosse vera la seconda delle ipotesi esaminate, le cose andrebbero, soprattutto in vicinanza dell'asse, come se il massimo non fosse ancora stato raggiunto.

Tabella X.

	t	$n = 2{,}5$	$n = 2{,}6$	$n = 2{,}7$
$P_{q-(q+3)}$	4,8 9,6	2,14 1,29	1,19 0,497	0,370 0,208
$P_{(q+3)}$	4,8 9,6	2,55 1,68	0,970 0,481	0,360 0,173

6, 3. – *Discussione dei valori di* γ.

Esaminiamo ora i dati della tabella IX relativa ai valori teorici di γ i quali risultano sistematicamente minori dei corrispondenti valori di $n-1$. Prima di confrontarli con i dati sperimentali è forse interessante far notare il meccanismo per cui si ha $\gamma < n-1$.

Fissiamo l'attenzione sulla P_q la quale per le (47) e (57) e omettendo il fattore (58) si può scrivere

$$P_q(A_t) = \omega k \int_{E_{min}}^{\infty} \pi r^2(E_p, A_t) \frac{\mathrm{d}E_p}{E_p^n}\,, \tag{63}$$

dove E_{min} è quel valore di E_p per cui

$$\pi r^2 = 0 . \tag{64}$$

Riscriviamo la (63) prendendo come variabili anzichè E_p e A_t

$$x = \frac{E_p}{A_t} \quad \text{ed} \quad A_t . \tag{65}$$

Si ha allora

$$P_q(A_t) = K\Delta\omega \frac{1}{A_t^{n-1}} \int_{c(A_t)}^{\infty} \varphi(x, A_t) \frac{dx}{x^n} ,$$

ove si è posto

$$C(A_t) = \frac{E_{min}}{A_t} , \quad \varphi(x, A_t) = \pi r^2(E, A_t) . \tag{66}$$

Se ora si ammette che $P_q(A_t)$ sia rappresentabile con una espressione del tipo (59) si ottiene la relazione

$$\int_{c(A_t)}^{\infty} \varphi(x, A_t) \frac{dx}{x_n} = \frac{n}{K\Delta\omega} A^{n-1-\gamma} , \tag{67}$$

la quale ci permette senz'altro di affermare che se l'integrale che figura al primo membro cresce al crescere di A_t necessariamente si deve avere $n - 1 - \gamma > 0$ ossia

$$\gamma < n - 1 , \tag{68}$$

e viceversa $\gamma > n - 1$ se l'integrale in questione cala al crescere di A_t.

Come è mostrato nell'Appendice 3 l'integrale che figura nella (67) cresce sempre al crescere di A_t *quando lo sciame ha passato il suo massimo.* Esso invece cala al crescere di A_t prima del massimo dello sciame. Ne segue che per sciami dopo il massimo γ soddisfa la condizione (68) mentre per sciami prima del massimo γ soddisfa una opposta relazione di disuguaglianza.

Dall'esame della tabella si vede che per una ben determinata profondità, al crescere di n, γ cresce assai lievemente. La dipendenza di γ_q da t_a può sembrare un poco strana ma essa è dovuta al fatto che per $t_a = 13$ e densità così elevate quali sono quelle da noi considerate il contributo dei primari di energia $y_p > 13$ non è trascurabile, fatto questo che fa aumentare il valore di γ (Appendice 3); anche il comportamento di γ_{q+3} e $\gamma_{q-(q+3)}$ si può interpretare con analoghe considerazioni che qui non riportiamo in dettaglio.

TABELLA XI.

t	4,8	9,6
Q	$\gamma_{sper} = 2{,}12$	$\gamma_{sper} = 2{,}00$
$(Q+3)+(Q+4)$	» $= 1{,}30$	» $= 1{,}05$
$Q+(Q+3)+(Q+4)$	» $= 1{,}65$	» $= 1{,}52$

Se ora si confrontano in base alle tabelle IX e XI i valori dei γ calcolati con quelli misurati si trova che mentre per le P_{q+3} c'è un accordo soddisfacente, per le P_q i γ teorici sono sistematicamente inferiori a quelli sperimentali. Dato però che gli errori sperimentali sono molto elevati si può cercare di scegliere sistematicamente le condizioni in cui la discrepanza è minore. Nella tabella abbiamo dato, per $t = 4{,}8$, $\gamma_{q-(q+3)} = 2{,}12$; forzando le cose al massimo si potrebbe abbassare questo valore fino al valore, poco probabile, 1,5 il quale è ancora maggiore del valore teorico 1,32; per $t = 9{,}6$ abbiamo $\gamma_{q-(q+3)} = 1{,}45$ che forzando le cose al massimo si può portare al valore, poco probabile, 1,4 sensibilmente maggiore del valore teorico 1,23.

Per quanto non si possa escludere in modo assoluto, sembra difficile poter attribuire tale divergenza solo ad errori sperimentali tanto più che lo scarto si presenta sempre nello stesso verso. Vogliamo quindi esaminare quali possono essere le diverse cause di una simile discrepanza.

1) Contributo degli sciami estesi che non hanno ancora raggiunto il loro massimo sviluppo. Questo punto è stato discusso nel n. 6, 2 e sembra che si possa escludere se la generazione dello sciame avviene essenzialmente in un solo atto, tanto più che, come si vede dalla tabella IX, i valori di γ crescono assai poco per questa ragione anche a quelle altezze ove la produzione di sciami è ancora apprezzabile ($t_a \sim 13\, X_0$). Ma se lo sciame fosse generato dalla primaria in un notevole numero di atti successivi, la sua struttura sarebbe sensibilmente diversa da quella calcolata in questo lavoro; tale diversità si manifesterebbe principalmente in vicinanza dell'asse ove presenterebbe alcune caratteristiche dello sciame che non ha ancora raggiunto il suo massimo sviluppo.

2) Insufficienza della rappresentazione teorica dello sciame. Come abbiamo più volte notato la nostra rappresentazione dello sciame differisce da quella di MOLIÈRE in quanto dà luogo ad una maggiore concentrazione in vicinanza dell'asse dello sciame, mentre presenta una minor coda. Ne segue che le funzioni di distribuzione alla Molière sono, in media, più spianate delle nostre; se, a titolo di esempio, ci riferiamo a funzioni di struttura del tipo delle $\rho(t, r)$ del n. 5, 2, le corrispondenti $d\rho/dr$ alla Molière risulteranno ancora negative e, almeno in media, in valore assoluto minori di quelle relative alle nostre distribuzioni. Se si riprende in esame la (VI) della Appendice 3 si

vede subito che con funzioni di distribuzione più spianate la $(\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}A_t)$, pur mantenendosi sempre positiva, aumenta rispetto al caso da noi trattato. Il limite inferiore dell'integrale (67) dato dalla (VII) dell'Appendice 3 diminuisce dato che E_{min} diminuisce. I due effetti quindi agiscono in verso opposto ma è facile convincersi che prevale l'aumento dell'integrando dato che nelle vicinanze di E_{min} φ è molto vicino a zero.

Tale argomento che verrà completato e precisato con un esempio in II, porta a ritenere che con le funzioni di distribuzione alla Molière la (67) cresca al crescere di A_t un poco più che nel nostro caso e quindi che il valore di γ non solo seguiti a soddisfare la (68) ma anzi diventi ancora minore. In ogni caso tale effetto dovrebbe essere piuttosto piccolo. Ci sembra così di potere escludere anche questa spiegazione della discrepanza fra i valori di γ teorici e quelli sperimentali.

In ogni caso la critica sollevata da MOLIÈRE [3] è priva di ogni fondamento dato che egli, non avendo ben compreso nè le modalità con cui sono state eseguite le nostre esperienze nè il modo in cui sono stati svolti i nostri calcoli, afferma, contrariamente al vero, che la nostra rappresentazione degli sciami estesi è troppo poco concentrata attorno all'origine.

3) Eventi locali ossia sciami penetranti prodotti nel Pb che copre le camere.

Una valutazione del contributo di questi eventi è immediata partendo dall'intensità della primaria al limite dell'atmosfera (53), dal suo cammino libero di assorbimento nell'aria $\Lambda = 125$ g/cm² e ammettendo che il contributo principale sia dovuto a protoni incidenti entro un angolo solido $\omega = 0{,}1$ attorno allo zenit. Si trova così che su di una delle nostre camere di area pari a 720 cm² incidono

$$5{,}18 \cdot 10^3 \, \frac{\mathrm{d}E}{E^{2,6}} \quad \text{protoni/h e camera}\,,$$

dove le energie sono misurate in miliardi di eV. Prendendo una sezione d'urto pari a quella geometrica del Pb e uno spessore di 2,5 cm si ha $N\sigma_g = 8{,}25 \cdot 10^{22}$ atomi $\times 2{,}5 \cdot 10^{-24} \cong 0{,}2$ e quindi un numero di processi dell'ordine di

$$10^3 \, \frac{\mathrm{d}E_p}{E_p^{1,6}}\,, \tag{69}$$

all'ora e per camera dovuti a nucleoni di energia fra E ed $E + \mathrm{d}E$. Per avere il numero totale dei processi che si osservano è necessario integrare rispetto all'energia fino all'infinito a partire dal valore minimo necessario per produrre sotto lo strato di Pb considerato il numero di particelle registrato dalle nostre camere, diciamo 105 nell'una e 50 nell'altra. Tale valore minimo della energia dipende evidentemente dal meccanismo ancora incognito di produzione degli sciami penetranti da parte della componente nucleonica.

Anche qui discuteremo due casi estremi:

a) Il numero A_t delle particelle prodotte nello strato t è proporzionale alla radice quadrata dell'energia del corpuscolo incidente E_p

$$A_t \backsimeq \alpha\sqrt{E_p}\,.$$

In questa categoria di eventi rientra la teoria di HEISENBERG ([25]) secondo la quale nell'urto di due nucleoni si ha un processo catastrofico del tipo di quello descritto nell'ipotesi 1) del n. 6, 2.

b) Il numero A_t delle particelle prodotte nello strato t è proporzionale all'energia del primario E_p

$$A_t \backsimeq \alpha' E_p\,.$$

In questa categoria rientra la teoria di HEITLER e JANOSSY ([26]) secondo la quale in ogni urto contro un nucleone quello incidente perde, in fenomeni di produzione di mesoni, circa un quarto della sua energia. Ha così luogo un susseguirsi di urti fra nucleoni, sostanzialmente tutti dello stesso tipo come sono quelli esaminati nelle ipotesi 2) del n. 6, 2.

Segue immediatamente dalla (69) che i corrispondenti spettri integrali degli impulsi dovrebbero essere del tipo

$$2\cdot 10^3\,\frac{1}{E_{min}^{1,6}} = \begin{cases} 2\cdot 10^3\,\dfrac{1}{\alpha A_t^{3/2}}\,, \\[2ex] 2\cdot 10^3\,\dfrac{1}{\beta A_t^{1,6}}\,, \end{cases} \tag{70}$$

dove il fattore 2 è stato introdotto per tener conto del fatto che sono due le camere che possono essere colpite in pieno dallo sciame penetrante.

Ora nel primo caso lo spettro è molto ripido e anche una piccola percentuale di eventi locali potrebbe essere sufficiente per spiegare la maggior pendenza osservata sperimentalmente rispetto a quella calcolata, per gli eventi P_Q. Senonchè se si prendono i risultati numerici di HEISENBERG si trova che, anche tenendo conto dell'eventuale moltiplicazione dei quanti γ prodotti dal decadimento dei neutretti, per avere $A_t \sim 150$ ci vuole una $E_{min} \sim 10^3\cdot 10^9$ eV che introdotta nella (70) rende del tutto trascurabile la frequenza di questi eventi. Nel secondo caso lo spettro degli impulsi è molto poco inclinato e potrebbe quindi spiegare la divergenza tra il γ sperimentale e il γ calcolato solo ammettendo che gli eventi locali siano in numero prevalente rispetto agli sciami estesi che non azionano le coincidenze $a+b+c$.

Ma se si prendono in considerazione i valori numerici di HEITLER e JANOSSY

([25]) W. HEISENBERG: *Zeits. f. Phys.*, **126**, 569 (1949).

([26]) W. HEITLER e L. JANOSSY: *Proc. Phys. Soc.* A **62**, 374 e 669 (1949).

si trova che anche in questo caso la frequenza degli eventi locali è del tutto trascurabile e anzi la situazione è ancora peggiore che nel caso di HEISENBERG.

Una frequenza non trascurabile degli eventi si potrebbe avere solo se valesse l'ipotesi *b*) ossia $A_t \sim \alpha' E_p$ purchè al tempo stesso l'energia persa nell'urto dal nucleone incidente fosse all'incirca uguale ad E_p e il numero dei nucleoni emessi fosse molto grande: ciò è possibile solo finchè la velocità del baricentro del nucleone urtante e del nucleone (o nucleo) urtato è piccola rispetto a c poichè altrimenti dopo l'urto essi conservano necessariamente una elevata frazione della energia iniziale nel sistema del laboratorio.

Dato però che non si conosce nessuna teoria quantitativa o semiquantitativa di questo tipo si può concludere che non sembra ragionevole attribuire la discrepanza tra i valori di γ calcolati e quelli sperimentali agli eventi locali nel Pb sovrastante le camere. Sembra quindi che tale differenza, per altro non grande, sia piuttosto da attribuire alla struttura dello sciame il quale potrebbe essere generato dai nucleoni della primaria attraverso numerosi processi successivi.

È per noi un doveroso piacere ringraziare il prof. B. FERRETTI per le numerose utili discussioni avute con lui su questo argomento.

APPENDICE 1.

Contributo dei fotoni di bassa energia irraggiati dagli elettroni entro il materiale sovrastante le camere.

Ci proponiamo di valutare il contributo dovuto ai fotoni di bassa energia che vengono irraggiati dagli elettroni nell'attraversare il materiale sovrastante la camera e che, giunti nelle loro vicinanze, generano un elettrone molle.

Come vedremo, tale contributo è dell'ordine o inferiore all'1 % per energie elevate degli elettroni e dell'ordine del 10 % per elettroni di bassa energia e sotto forti spessori di Pb. È pertanto giustificato seguire il procedimento valido per $E \leqslant E_m$ che è stato esposto nel n. 5, 2.

La (22) si deve sostituire con la espressione

$$\text{(I)} \qquad P_e(t, r) = \int_0^\infty p(E, r)\Pi(E_s, 0, t)\,\mathrm{d}E + \int_0^\infty p(E, r)\,\mathrm{d}E \int_0^t \Pi(E_s, 1, t')\,\mathrm{d}t' \int_{1,2\mathrm{MeV}}^{\varepsilon_s} \exp\left[-(t-t')\alpha(K)\right]\eta(K)\,\frac{\mathrm{d}K}{K}\,,$$

dove $\alpha(k)$ è il coefficiente di assorbimento nel piombo dei fotoni di energia K; $\eta(K)$ è l'efficienza della camera per la rivelazione di tali fotoni ossia il numero di elettroni secondari generati da un quanto di energia K entro uno staterello di spessore pari al percorso di tali elettroni secondari. $\mathrm{d}K/K$ rappresenta

grossolanamente la probabilità che un elettrone irraggi un quanto di energia fra K e $K + \mathrm{d}K$.

Come si vede dalla integrazione rispetto a K il secondo termine della (I) si riferisce a fotoni di energia inferiore all'energia critca ε_s i quali non contribuiscono più alla cascata elettronica e pertanto sono poco assorbiti nel piombo.

Termini di questo tipo sono stati considerati da GREISEN ([27]) il quale ne ha mostrato l'importanza nella discussione di esperimenti sugli sciami estesi eseguiti con contatori sotto forti spessori di Pb.

In tali calcoli questo autore ha supposto che α ed η fossero costanti nell'intervallo da 1,2 a 7 MeV:

$$\alpha = 0{,}19\,, \qquad \eta = 0{,}02\,. \tag{II}$$

Sotto le stesse ipotesi semplificative potremo scrivere la (I) nella forma

$$P_e(t, r) = \int_0^\infty E p(E, r)\Pi(E_s, 0, t)\,\{1 + C\}\,\mathrm{d}y\,, \tag{III}$$

dove

$$C = \eta \ln \frac{\varepsilon_s}{1{,}2} \frac{\int_0^t \Pi(E_s, 1, t')\exp[-\alpha(t - t')]\,\mathrm{d}t'}{\Pi(E_s, 0, t)}\,, \tag{IV}$$

è stato calcolato dai valori di BHABHA e CHAKRABARTY per $\Pi(E, 0, t)$ e dal rapporto

$$\frac{\Pi(E, 0, t)}{\Pi(E, 1, t)} = K_1(s_1 - s)\rho_1^s(s, 1)$$

dedotti dalle formule di ROSSI e GREISEN in approssimazione B.

I valori di C dedotti in tal modo per alcuni valori di t e y sono raccolti nella tabella I

TABELLA I.

t \ y	-1	3	4
4,8	$2{,}2 \cdot 10^{-2}$	$0{,}47 \cdot 10^{-2}$	$0{,}42 \cdot 10^{-2}$
9,6	$14 \cdot 10^{-2}$	$1{,}5 \cdot 10^{-2}$	$1 \cdot 10^{-2}$

Come si vede, C ha un valore apprezzabile solo per basse energie e spessori elevati. Tuttavia il valore di $E_p(E, r)\Pi(E_s, 0, 9{,}6)$ è così piccolo per $E = \exp[-1]$ che l'errore introdotto omettendo $C \cong 0{,}14$ rispetto alla unità è senz'altro trascurabile rispetto al valore dell'integrale (3).

Analoghe considerazioni valgono per la $P_\gamma(t, r)$.

([27]) K. GREISEN: *Phys. Rev.*, **75**, 1072 (1949).

APPENDICE 2.

Calcolo di Φ con il metodo del punto di sella.

Scriviamo la (32) nella forma caratteristica del metodo del punto di sella:

$$\text{(I)}\qquad \Phi(E_p, E, t) = \frac{E_p}{2\pi i}\int \exp\,[\xi(s)]\,\mathrm{d}s =$$

$$= \frac{E_p}{2\pi i}\exp\,[\xi(s_0)]\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left[-\frac{1}{2}\,\xi''(s_0)\tau^2\right]\mathrm{d}\tau = \frac{E_p}{2\pi i}\,\frac{\exp\,[\xi(s_0)]}{\sqrt{\xi''(s_0)}}\,,$$

dove

$$\text{(II)}\qquad \xi(s) = \ln\frac{\sigma+\mu}{\mu-\nu} + \mu t_a + (s-1)y + \ln s(s-1)$$

è stato sviluppato in serie di potenze

$$\text{(III)}\qquad \xi(s) = \xi(s_0 + i\tau) = \xi(s_0) + i\tau\xi'(s_0) - \frac{\tau^2}{2}\,\xi''(s_0) - i\,\frac{\tau^3}{3\,!}\,\xi(s_0) + \ldots$$

nell'intorno del punto sull'asse reale s_0; questo è radice della equazione

$$\text{(IV)}\qquad \xi'(s_0) = \eta' + \mu' t_a + y - \frac{2s-1}{s(s-1)} = 0\,,$$

dove

$$\text{(V)}\qquad \eta = \ln\frac{\sigma+\mu}{\mu-\nu}\,.$$

La (IV) ci fornisce la relazione che lega s_0 a $y = \ln E_p/E = y_p - y_a$, la quale, introdotta nella (I), ci permette di esprimere Φ in funzione delle variabili E_p, E, t.

Affinchè il metodo del punto di sella dia un risultato attendibile, è necessario, evidentemente, che il 4° termine dello sviluppo in serie (III) sia piccolo rispetto al 3° termine.

Per μ e ν abbiamo usato le espressioni

$$\text{(VI)}\qquad \begin{matrix}\mu\\ \nu\end{matrix} = -\frac{\sigma + c + \psi(s)}{2} \pm \left\{\left(\frac{c+\psi(s)-\sigma}{2}\right)^2 + \frac{2\sigma}{s(s+1)}\right\}^{1/2},$$

dove $c = 0{,}5772$ è la costante di Mascheroni; $\sigma = 7/9$; $\psi(s) = \mathrm{d}/\mathrm{d}s\,\ln\Gamma(s+1)$. La (VI) si deduce facendo uso delle cosiddette sezioni d'urto semplificate valide per elettroni e quanti γ di elevata energia.

Con un semplice calcolo numerico si ottengono, in funzione di s, i valori dei vari termini che figurano nella (IV) e da questi, per ogni valore di t_a, i corrispondenti valori di y (tabella II).

Tabella II.

s	η'	μ'	$\dfrac{2s-1}{s(s-1)}$	y		
				$t_a = 13$	$t_a = 15$	$t_a = 17$
1	— 0,5134	— 0,9383				
2	— 0,8796	— 0,2562	1,5000	5,71	6,22	6,73
3	— 0,8452	— 0,0838	0,8333	2,77	2,93	3,10
4	— 0,6953	— 0,0355	0,5833	1,71	1,78	1,85

Per il calcolo di ξ, ξ'' e ξ''' ci siamo serviti delle seguenti formule di interpolazione per η' e μ'

$$\eta' = -\frac{6,6246}{s^3} + \frac{13,5655}{s^2} - \frac{8,0179}{s} + 0,5655\,,$$

$$\mu' = \frac{1,6337}{s^3} - \frac{3,4906}{s^2} + \frac{1,0213}{s} - 0,0970\,.$$

Le varie grandezze che intervengono nel calcolo di Φ a mezzo della (I). sono raccolte nella tabella III. La quantità $(\sqrt{2}/3)\cdot(\xi'''/\xi'')$ rappresenta, a meno del fattore i, il rapporto del 3° al 2° termine della (III) calcolato per quel valore di τ ove il secondo termine è uguale a 1; esso ci fornisce una indicazione dell'errore percentuale (dato che lo sviluppo in serie (III) figura all'esponente) che si commette applicando il metodo del punto di sella.

Tabella III (app. 2).

s_0	$y = y_p - y_a$	$\xi(s_0)$	$\xi''(s_0)$	$\dfrac{\sqrt{2}}{3}\,\dfrac{\xi'''}{\xi''^{3/2}}$	Φ/E_p
			$t = 13$		
2	5,710	— 3,230	4,655	0,20	$7,04\cdot10^{-3}$
3	2,768	— 7,363	1,389	0,23	$2,15\cdot10^{-4}$
4	1,734	— 9,858	0,714	0,22	$6,70\cdot10^{-5}$
			$t = 15$		
2	6,223	— 3,746	5,201	0,18	$4,14\cdot10^{-3}$
3	2,935	— 8,361	1,542	0,21	$7,52\cdot10^{-5}$
4	1,781	— 1,157	0,774	0,20	$6,50\cdot10^{-6}$
			$t = 17$		
2	6,735	— 4,064	5,747	0,17	$2,33\cdot10^{-3}$
3	3,103	— 9,360	1,695	0,20	$2,60\cdot10^{-5}$
4	1,848	— 12,398	0,833	0,19	$1,80\cdot10^{-6}$

APPENDICE 3.

La discussione dell'integrale che figura nella (67)

$$\text{(I)} \qquad \int\limits_{C(A_t)}^{\infty} \varphi(x, A_t)\, \frac{dx}{x^n}\,,$$

si può fare in modo assai semplice se si ammette di poter rappresentare gli sciami estesi con una funzione di struttura $\rho(t, r)$, come per esempio la (26). In questo caso si ha

$$\text{(II)} \qquad A_t = \Delta \cdot a = a\rho(t, r)\Pi(E_p, 0, t_a)$$

a mezzo della quale vogliamo ora calcolare

$$\text{(III)} \qquad \left(\frac{d\varphi}{dA_t}\right)_{x=\text{cost}} \quad \text{e} \quad \frac{dC(A_t)}{dA_t}\,.$$

A tale scopo osserviamo che si ha

$$\text{(IV)} \qquad \rho(t, r) = \frac{A_t}{a}\,\frac{1}{\Pi(E_p, 0, t_a)}$$

e

$$\text{(V)} \qquad \Pi(E_{min}, 0, t_a) = \frac{A_t}{a}\,\frac{1}{\rho(t, 0)}\,.$$

Se ora al posto di $\Pi(E_p, 0, t_a)$ si sostituisce la (27) e dopo aver espresso le varie grandezze in funzione di A_t ed x si derivano le (IV) rispetto ad A_t mantenendo x costante si trova

$$\text{(VI)} \qquad \left(\frac{d\varphi}{dA_t}\right)_{x=\text{cost}} = 2\pi r\left(\frac{\partial r}{\partial A_t}\right) = 2\pi\sqrt{t_a}\sqrt{t_a - \alpha}\,\exp\,[t_a] \times$$
$$\times \exp\,[-2(t_a - \alpha)^{1/2}(y_p - \beta)^{1/2}]\,\frac{1}{(y_p - \beta)^{1/2}}\cdot\frac{r}{\dfrac{d\rho(t, r)}{dr}}\left\{1 - \frac{1}{2}\,\frac{1}{y_p - \beta} - \frac{\sqrt{t_a - \alpha}}{(y_p - \beta)^{1/2}}\right\},$$

dove r va pensato come funzione di A_t ed x tramite la (IV), e

$$\text{(VII)} \qquad \frac{dC(A_t)}{dA_t} = \frac{E_{min}}{A_t^2(0)}\left\{\frac{2(y_{min} - \beta)}{2\sqrt{t_a - \alpha}\sqrt{y_m - \beta} + 1} - 1\right\}.$$

Dato che $d\rho(t, r)/dr < 0$, da queste espressioni segue immediatamente che per

$$\text{(VIII)} \qquad y_p < t_a + (1 - \alpha + \beta) = t_a + 0{,}16\,,$$

$$\text{(IX)} \qquad \frac{d\varphi}{dA_t} > 0\,, \qquad \frac{dC(A_t)}{dA_t} < 0\,,$$

e quindi l'integrale che figura nella (I) certamente cresce al crescere di A_t e quindi necessariamente

$$\gamma < n - 1 .$$

Il segno delle (IX) si inverte solo se si ha $y_p > t_a + 0{,}16$ ossia solo se l'energia del primario è tale che il massimo dello sciame cade al di sotto della stazione di osservazione. In queste condizioni è chiaro che il comportamento dello sciame si deve invertire ma è anche chiaro che i nostri calcoli non sono più applicabili.

Abbiamo poi verificato numericamente che le funzioni $\varphi(x, A_t)$ e $C(A_t)$ presentano lo stesso comportamento anche nel caso in cui esse non siano dedotte da una funzione di struttura ma calcolate con i procedimenti esposti nel n. 5.

Si può quindi concludere che mentre per gli sciami dopo il massimo del loro sviluppo si ha sempre $\gamma < n - 1$, per sciami che non abbiano ancora raggiunto il loro massimo si ha $\gamma > n - 1$. Ne segue che *anche un piccolo contributo di sciami prima del loro massimo t tende a far aumentare il valore di* γ.

SUMMARY

The Authors describe a research devoted to comparing the behaviour of the soft component of extensive air showers, with the theoretical results derived from the usual electronic cascade theory. The existence of mesons and nucleons in extensive air showers suggests that such a theory cannot give an adequate representation even of the soft component of the shower. The experimental device, consisting of 4 ionization chambers and 4 sets of counters in coincidence, makes use of the multiplication of the soft component of the impinging extensive showers in a Pb layer (2,5 or 5 cm thick) surrounding the ionization chambers. The results of some preliminary measurements are compared with the results of numerical calculations. These last have been performed assuming that in an extensive air shower the spatial distribution of electrons and photons of a given energy, can be represented by a Gaussian law, modified with respect to that used by other Authors. This type of representation of the structure of the showers is compared with other more accurate structure functions. The discrepancy between the experimental results and the theoretical calculations is not large, mainly on account of the large statistical errors. The Authors attribute this discrepancy to the actual structure of extensive air showers.

IL NUOVO CIMENTO Vol. VII, N. 4 2 Luglio 1950

Sulle disintegrazioni nucleari prodotte dalla radiazione nucleonica a 3500 m s.l.d.m.

J. Buschmann (*), I. F. Quercia e B. Rispoli

Istituto di Fisica dell' Università, Centro di studio per la Fisica Nucleare del C.N.R., Roma

(ricevuto il 25 Aprile 1950)

Riassunto. — Lo scopo principale della presente ricerca è di determinare a 3500 m il rapporto N/P tra la frequenza N di stelle generate da una radiazione neutra e la frequenza P di stelle generate da una radiazione ionizzante. Vengono misurati contemporaneamente i fiotti di ionizzazione in una camera di ionizzazione rapida, e le coincidenze tra essa e dei contatori di G.M. che la circondano. I fiotti sono dovuti principalmente a stelle generate nella camera e le coincidenze a: 1) stelle generate da una radiazione ionizzante; 2) stelle generate da una radiazione neutra che abbiano almeno un ramo ionizzante di potere penetrante maggiore di 1,7 g/cm². Viene indicato un limite superiore per la percentuale x di stelle con rami di potere penetrante maggiore di 5,7 g/cm². Si calcola il rapporto N/P per vari valori di x e si vede che esso è almeno 2 per le stelle di alta energia, mentre sulle basse energie almeno il 90 % delle stelle sono generate da neutroni. Viene inoltre misurato il cammino di assorbimento della radiazione stellogena in paraffina che risulta 206 ± 40 g/cm².

1. – Introduzione.

Lo studio delle disintegrazioni nucleari in relazione alla natura e alla energia della radiazione generante è considerato oggi un problema di grande interesse.

(*) Max Planck Institut Göttingen, attualmente presso il Centro di Studio per la Fisica Nucleare del C.N.R., Roma.

Vari autori si sono diffusamente occupati dell'argomento (1) (2) (3) (4).

Secondo BERNARDINI, CORTINI e MANFREDINI (2) la radiazione stellogena (5) sarebbe costituita per il 10 % al più di mesoni negativi, mentre il 90 % di essa dovrebbe identificarsi con la componente nucleonica. Sembrerebbe inoltre che la frequenza N di stelle generate da una radiazione neutrale debba essere almeno doppia della frequenza P di stelle generate da una radiazione ionizzante. Ciò è in accordo con le conclusioni teoriche di FERRETTI (6), secondo le quali il rapporto fra neutroni e protoni con energia compresa fra 200 e 700 MeV a 3 500 m sarebbe circa 1,8.

Nonostante le conclusioni precedenti manca ancora un dato sperimentale diretto sul rapporto N/P. Pertanto ci è sembrato di un certo interesse determinare sperimentalmente tale rapporto, ed in questa nota riferiremo i risultati preliminari ottenuti.

2. – Descrizione del dispositivo sperimentale.

Al fine di misurare il rapporto N/P abbiamo usato una camera di ionizzazione rapida.

Infatti, secondo le misure di ROSSI *et al.* (3) e di AMALDI, CASTAGNOLI, GIGLI e SCIUTI (7) con camere di ionizzazione di questo tipo, una grande percentuale dei fiotti di ionizzazione che vengono registrati a 3 500 m s.l.m. è dovuta a disintegrazioni nucleari del genere di quelle osservate come stelle nelle lastre fotografiche.

La nostra camera è del tipo cilindrico ad elettrodi coassiali sul modello di quelle descritte da ROSSI *et al.* (3), ma presenta alcune particolarità che riteniamo opportuno riferire.

La parte cilindrica di ottone è ricavata da un tubo di 77 mm di diametro interno ed 1,5 mm di spessore della parete; tale tubo è in gran parte tornito sino a ridurne lo spessore a 0,3 mm salvo agli estremi ed in 15 anelli che sono

---

(1) Vedasi, ad es. i seguenti lavori pubblicati sull'argomento e bibliografia ivi citata: E. P. GEORGE: *Nature*, **162**, 333 (1948); E. P. GEORGE, A. C. JASON: *Proc. Roy. Soc.*, **62**, 243 (1949); H. D. PERKINS: *Phil. Mag.*, **40**, 601 (1949); G. THOMSON: *Phil. Mag.*, **40**, 305 (1949); R. H. BROWN, U. CAMERINI, P. H. FOWLER, H. HEITLER, D. T. KING e C. F. POWELL: *Phil. Mag.*, **40**, 862 (1949).

(2) G. BERNARDINI, G. CORTINI e A. MANFREDINI: *Nuovo Cimento*, **6**, 470 (1949).

(3) H. S. BRIDGE e B. ROSSI: *Phys. Rev.*, **75**, 179 (1948); H. S. BRIDGE, W. E. HAZEN e B. ROSSI: *Phys. Rev.*, **73**, 179 (1948); H. S. BRIDGE e W. E. HAZEN: *Phys. Rev.*, **74**, 579 (1948).

(4) G. B. HARDING, S. LATTIMORE, T. T. e D. H. PERKINS: *Nature*, **163**, 319 (1949).

(5) Nel seguito useremo l'abbreviazione r.s.

(6) B. FERRETTI: *Nuovo Cimento*, **6**, 379 (1949).

(7) E. AMALDI, C. CASTAGNOLI, A. GIGLI e S. SCIUTI: *Nuovo Cimento*, **7**, 401 (1950).

stati lasciati dello spessore originario (fig. 1). I fondelli sono ricavati da una lamiera di ottone da 4 mm imbutita e sono saldati ad ottone alle estremità del cilindro. È stata data una simile struttura alla camera allo scopo di ottenere delle pareti estremamente sottili che nel contempo sopportino pressioni relativamente elevate. I tre esemplari di tali camere che sono stati costruiti e provati, hanno resistito senza presentare alcun inconveniente fino a 35 atmosfere, e possono venire usati con sicurezza sino a 20 atmosfere di pressione.

Il preparato radioattivo α di Polonio necessario per la taratura è depositato all'estremo di una assicella metallica che può correre liberamente entro un tubo

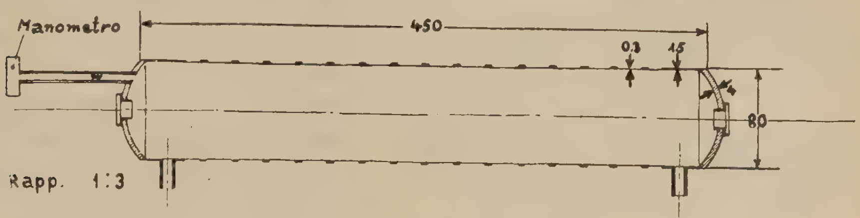


Fig. 1. – Camera a ioni.

saldato su uno dei fondelli. Con questo sistema è possibile avvicinare o allontanare il preparato dalla zona sensibile della camera.

I dati geometrici della camera sono:

— spessore parete cilindrica mediato su tutta la superficie cilindrica: 0,67 mm ($0,6\ g/cm^2$);
— area sezione trasversale: 46 cm^2;
— area sezione longitudinale: 350 cm^2;
— area parete cilindrica: 1090 cm^2;
— volume interno: 2100 cm^3;
— lunghezza del filo assiale: 46 cm.

Le misure che riportiamo al n. 3 sono state eseguite riempiendo la camera con Argon a 7,5 atmosfere. Il gas è stato depurato dall'ossigeno lasciandolo circolare a termosifone per un tempo dell'ordine di un'ora tra la camera ed un depuratore contenenti trucioli di Calcio metallico alla temperatura di 300 °C. Abbiamo potuto osservare sperimentalmente che un'ora è il tempo optimum per ottenere la maggior velocità di salita degli impulsi forniti dalla camera. Probabilmente ciò è da mettere in relazione con la scomposizione delle molecole di CO_2 presenti nel gas e fissazione da parte del Calcio dell'Ossigeno di tali molecole. È infatti noto che l'impoverimento del contenuto in CO_2 del gas fa diminuire la mobilità degli elettroni in seno al gas. Il tempo di salita degli impulsi delle particelle α del Polonio da noi osservato con 7,5 atmosfere di Argon in tal guisa depurato e con 4 kV di tensione tra gli elettrodi è risultato, fra il 10 % ed il 90 % dell'ampiezza degli impulsi 2,5 μs.

Prima di iniziare i conteggi a 3 500 m s.l.m. al Laboratorio della Testa Grigia ([8]) abbiamo eseguito delle misure a Roma nella cantina dell'Istituto di Fisica ([9]). Con il preparato inserito si contavano con un taglio corrispondente a 2,7 MeV 24 impulsi al minuto, mentre a preparato disinserito se ne contavano 4. Con taglio 2α pari a 10,8 MeV si aveva invece una frequenza di circa 1 impulso all'ora. Quest'ultimo dato è dell'ordine di grandezza previsto per gli sciami e le disintegrazioni nucleari.

La camera è posta entro un involucro cilindrico di lamiera di alluminio di 1 mm di spessore che la circonda ad una distanza di 10 cm dalla parete. Fra questo involucro e la camera possono prendere alloggiamento degli assorbitori per lo studio della natura e del potere penetrante dei rami ionizzanti delle stelle. Esternamente allo schermo di alluminio sono disposti in corona, su due circonferenze concentriche (fig. 2) e con gli assi paralleli alla camera, 28 contatori di 4 cm di diametro, lunghezza utile 50 cm e spessore delle pareti di ottone 1 mm. L'angolo solido coperto dai contatori rispetto alla camera è di circa l'80 %.

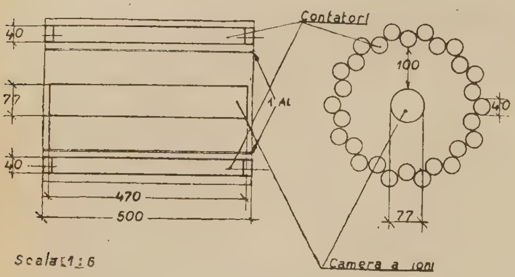


Fig. 2.

In fig. 3 è dato lo schema di insieme del dispositivo. Ciascuna coppia di contatori adiacenti è posta in parallelo e connessa ad uno stadio S.F.I. di formazione di impulsi ([10]). Le uscite dei 14 circuiti S.F.I. vengono riunite mediante altrettanti diodi e direttamente connesse ad uno stadio di coincidenze doppie all'altro ingresso del quale sono inviati, tramite un multivibratore, gli impulsi della camera precedentemente amplificati e discriminati in ampiezza. Il potere risolutivo della coincidenza realizzata con 2 pentodi del tipo 6SH7 con basso carico anodico era 10 μs. La durata degli impulsi forniti dagli S.F.I. era maggiore del tempo di salita degli impulsi della camera di ionizzazione (3 μs circa). Ciò era necessario in quanto, con il dispositivo descritto la discriminazione effettuata all'uscita dell'amplificatore connesso con la camera, introduceva un ritardo inevitabile.

Mediante numeratori elettromeccanici venivano registrati contemporanea-

([8]) Nel seguito indicato semplicemente con le iniziali L.T.G.

([9]) Lo spessore totale delle parti in muratura che sovrastano l'apparecchio era circa 100 g/cm².

([10]) Il circuito S.F.I., come altri impiegati in questa esperienza sono stati descritti in una nota tecnica: I. F. QUERCIA e B. RISPOLI: *Nuovo Cimento*, **6**, 63 (1949).

mente i fiotti di ionizzazione nella camera e le coincidenze fra la camera ed uno qualsiasi dei 28 contatori.

Le coincidenze casuali sono state misurate in tre modi distinti:

1) Misurando elettronicamente, con una coppia di impulsi sfasabili [10] il potere risolutivo e calcolando la frequenza delle casuali.

2) Misurando le coincidenze tra i contatori e degli impulsi periodici artificiali con frequenza dell'alternata di rete inviati per capacità sulla camera di ionizzazione.

3) Misurando quale percentuale di impulsi nella camera sia in coincidenza ritardata (ritardo compreso fra 10 e 20 μs) con uno qualsiasi dei 28 contatori. Il numero di coincidenze ritardate registrate senza alcun assorbitore

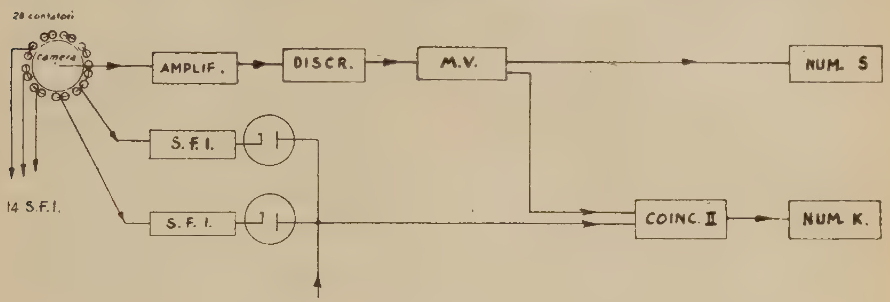


Fig. 3.

interposto tra la camera ed i contatori è senz'altro uguale al numero di casuali in quanto nè le fluttuazioni dei ritardi propri dei nostri contatori nè alcun altro evento fisico può dar luogo ad una tale coincidenza ritardata.

Queste tre misure indicano concordemente che il rapporto tra le coincidenze casuali e gli impulsi della camera di ionizzazione è dell'ordine dell'1 %.

3. – Risultati delle misure.

Le misure che vengono riportate nella tab. I, sono state effettuate al L.T.G. (685 g/cm²) sotto un soffitto dello spessore di 1,4 g/cm². Esse sono state raggruppate in 4 diversi tipi di misure:

1) *Misure OO*. – In esse non vi era altro assorbitore che le pareti della camera, quelle dei contatori ed il supporto in alluminio, pari a complessivi 1,7 g/cm².

2) *Misure* 45 $\overline{P}$. – Sopra tutto il dispositivo, a 30 cm dall'asse della camera, era stato posto un assorbitore di paraffina di 45 cm (38 g/cm²) di spessore e 75 $\times$ 75 cm² di base.

TABELLA I. – *Risultati delle misure corretti dalle casuali e sciami.*

Tipo misura	S (fiotti all'ora)			K (coinc. all'ora)			K/S (%)		
	$\geqslant 1,2\ \alpha$	$\geqslant 1,5\ \alpha$	$\geqslant 2,0\ \alpha$	$\geqslant 1,2\ \alpha$	$\geqslant 1,5\ \alpha$	$\geqslant 2,0\ \alpha$	$\geqslant 1,2\ \alpha$	$\geqslant 1,5\ \alpha$	$\geqslant 2,0\ \alpha$
00	$66,1 \pm 1,2$	$19,4 \pm 0,6$	$8,8 \pm 0,3$	$6,1 \pm 0,5$	$5,3 \pm 0,4$	$3,4 \pm 0,1$	$9,3 \pm 0,8$	$27,6 \pm 2,0$	$39,0 \pm 1,6$
45 $\overline{P}$	$62,4 \pm 1,0$	$16,2 \pm 0,4$	$7,4 \pm 0,2$	$5,9 \pm 0,3$	$3,8 \pm 0,2$	$2,9 \pm 0,1$	$9,5 \pm 0,5$	$23,5 \pm 1,4$	$39,2 \pm 2,3$
2 P	$69,2 \pm 1,9$	$18,5 \pm 0,9$	$8,5 \pm 0,4$	$7,8 \pm 0,7$	$5,5 \pm 0,5$	$3,2 \pm 0,3$	$11,3 \pm 1,1$	$29,6 \pm 2,8$	$37,8 \pm 2,8$
0,2 Pb	$70,1 \pm 1,9$	$20,5 \pm 1,1$	$10,3 \pm 0,6$	$8,3 \pm 0,7$	$5,6 \pm 0,6$	$3,2 \pm 0,4$	$11,8 \pm 1,0$	$27,5 \pm 3,6$	$31,3 \pm 4,2$

TABELLA II. – *Dati differenziali calcolati dalla tab. I.*

Tipo misura	ΔS (fiotti all'ora)		ΔK (coinc. all'ora)		$\Delta K/\Delta S$ (%)	
	$1,2\alpha \leqslant \tau \leqslant 1,5\alpha$	$1,5\alpha \leqslant \tau \leqslant 2,0\alpha$	$1,2\alpha \leqslant \tau \leqslant 1,5\alpha$	$1,5\alpha \leqslant \tau \leqslant 2\alpha$	$1,2\alpha \leqslant \tau \leqslant 1,5\alpha$	$1,5\alpha \leqslant \tau \leqslant 2\alpha$
00	$46,7 \pm 1,3$	$10,6 \pm 0,7$	$0,8 \pm 0,6$	$1,9 \pm 0,4$	$1,7 \pm 1,4$	$18,1 \pm 3,5$
45 $\overline{P}$	$46,2 \pm 1,4$	$8,8 \pm 0,5$	$2,1 \pm 0,5$	$0,9 \pm 0,2$	$6,7 \pm 1,1$	$10,2 \pm 2,9$
2 P	$50,7 \pm 2,2$	$10,0 \pm 0,9$	$2,4 \pm 0,8$	$2,3 \pm 0,5$	$4,7 \pm 1,5$	$22,6 \pm 5,9$
0,2 Pb	$49,6 \pm 2,2$	$10,2 \pm 1,3$	$2,6 \pm 0,9$	$2,5 \pm 0,7$	$5,3 \pm 1,8$	$23,7 \pm 7,4$

3) *Misure* 2 P. – Tra la camera ed i contatori, nell'interno dell'involucro erano interposti 2 cm di paraffina (1,7 g/cm²).

4) *Misure* 0,2 Pb. – Come nella fig. 3 con l'aggiunta di 0,2 cm di Piombo. Lo spessore totale dell'assorbitore, ivi comprese le pareti e l'involucro di alluminio era in tal caso 5,7 g/cm².

Per ogni tipo di misura sono stati effettuati conteggi per tre valori del taglio τ di energia, e precisamente 1,2 α (6,5 MeV); 1,5 α (8,1 MeV); 2,0 α (10,8 MeV). Prima e dopo ogni conteggio veniva effettuata la taratura in energia per mezzo del preparato radioattivo.

Gli errori indicati sono gli errori statistici calcolati totalizzando tutte le misure. È stato eseguito un controllo interno delle misure calcolando gli errori quadratici medi con il metodo di Gauss, prendendo i dati di ciascun conteggio come una misura indipendente ed attribuendo ad essa un peso inversamente proporzionale al quadrato della rispettiva fluttuazione statistica. L'errore quadratico medio così calcolato non è mai risultato maggiore del doppio della fluttuazione statistica.

In tab. II sono riportate le frequenze ΔS dei fiotti e le frequenze ΔK delle coincidenze insieme con i rapporti $\Delta K/\Delta S$ relativi alle due bande di energia: 1,2 α $\div$ 1,5 α; 1,5 α $\div$ 2,0 α. Ai dati riportati nelle tab. I e II sono state sottratte le casuali ed il contributo dato dagli sciami estesi, secondo quanto sarà detto nel prossimo n. 4.

4. – Interpretazione delle misure.

Esamineremo ora quali siano gli eventi che vengono registrati rispettivamente come S e come K.

A) EVENTI S. – Ad essi contribuiscono tutti gli eventi nei quali delle particelle ionizzanti perdono entro la camera una energia complessiva superiore al valore del taglio, vale a dire rispettivamente 6,5; 8,1; 10,8 MeV. Possiamo distinguere i seguenti 3 tipi di eventi:

1) *Particelle singole*. – Prenderemo in esame dapprima il contributo dato dai protoni. Tenendo presente che la radiazione protonica è prevalentemente verticale, si può escludere che vi sia un suo contributo per i tagli 1,5 α e 2,0 α, mentre una piccola percentuale delle S registrate con il taglio 1,2 α potrebbe essere dovuta a protoni alla fine del loro percorso. Tuttavia l'esame dei dati sperimentali mostra che tale contributo è inapprezzabile nelle misure OO; infatti un tale evento verrebbe registrato anche come K e nella tab. II si può osservare che il rapporto $\Delta K/\Delta S$ al quale contribuiscono anche altri eventi che discuteremo in *B*), è molto piccolo (1,69 $\pm$ 1,37 %) nella banda di energia 1,2 $\div$ 1,5. Poichè altri tipi di particelle elementari hanno una ionizzazione

inferiore a quella dei protoni alla fine del loro percorso, si può concludere che il contributo dato dalle particelle singole sia alle S che alle K nelle misure OO, è trascurabile. Del pari trascurabile considereremo tale contributo negli altri tipi di misure.

2) *Sciami.* – Nella tab. III sono riportate le minime densità Δ che debbono avere i grandi sciami atmosferici affinchè vi sia nella camera un fiotto di ionizzazione la cui energia totale sia maggiore del valore del taglio τ. Nella colonna $N(\Delta)$ della stessa tab. III sono date le frequenze degli sciami di densità Δ secondo le misure effettuate senza alcun assorbitore (misure OO) al L.T.G. da AMALDI, CASTAGNOLI, GIGLI e SCIUTI (7). Le intensità dei fiotti dovuti a sciami atmosferici non vengono sostanzialmente alterate negli altri tipi di misure in quanto lo spessore dei materiali non supera mai un cammino di radiazione. Dalle tab. I e III si vede che le correzioni che abbiamo apportato ai nostri dati sperimentali per tener conto del contributo dato dai grandi sciami (sia sulle S che sulle K) sono molto piccole (in ogni caso inferiori al 4%).

TAB. III. – *Frequenza dei grandi sciami atmosferici in funzione della densità.*

τ (Taglio in MeV)	Δ (Particelle per m^2)	$N(\Delta)$ (Sciami all'ora)
6,5	1960	0,18
8,1	2450	0,14
10,8	2980	0,11

Per quanto riguarda gli sciami generati localmente, si è calcolato che nelle misure 45 $\overline{P}$ l'energia minima che deve avere un elettrone per generare un fiotto di energia totale pari a 1/3 del nostro taglio minimo è dell'ordine di 10^{12}-10^{13} eV. Nonostante che lo spettro elettronico alla quota di 3 500 m non sia noto con certezza, tuttavia si può ritenere che il numero di elettroni con energia di quell'ordine di grandezza sia circa 1 ogni 100 ore.

Del pari trascurabile è il contributo dato dagli sciami penetranti generati superiormente all'apparecchio.

Da quanto precede si può concludere che sottratto il contributo dei grandi sciami atmosferici e trascurando il contributo dovuto alle stelle generate nei materiali che circondano la camera, la totalità dei fiotti di ionizzazione è dovuta a:

3) *Disintegrazioni nucleari avvenute nel gas della camera o nelle pareti di essa.* – Eventi di questo genere vengono ordinariamente divisi in «sciami penetranti» e «stelle». La distinzione fra i due tipi di eventi è puramente

fenomenologica, in quanto è stato da più autori mostrato (11) che fra i due fenomeni vi è una stretta relazione e devono essere considerati entrambi come effetti della interazione della radiazione cosmica con la materia nucleare (12); la differenza fra i due tipi di fenomeni consiste nel fatto che mentre nei primi sono in giuoco energie dell'ordine di 10^9 eV ed oltre, nelle stelle si tratta di processi di bassa energia, e precisamente sembra che la maggior parte di stelle sia generata da energia compresa tra 200 e 700 MeV.

Poichè la frequenza degli sciami penetranti sufficientemente densi, è estremamente più bassa della frequenza delle stelle, potremo asserire che le disintegrazioni nucleari da noi registrate siano generalmente da considerare come stelle.

B) Eventi *K*. – Viene registrata una coincidenza *K* ogni qual volta il fiotto di ionizzazione della camera è associato nel tempo con la scarica di uno o più contatori. Tralasciando il piccolo contributo dato dalle particelle singole e dagli sciami già esaminato in *A*, 1) e *A*, 2) possiamo asserire che contribuiscono alle *K*: 1) le stelle generate da radiazione stellogena neutra ma accompagnate da una radiazione ionizzante; 2) le stelle generate da radiazione stellogena ionizzante.

Esaminiamo ora separatamente il contributo dato da ognuno di questi eventi.

1) *Stelle generate dalla radiazione stellogena neutra ma accompagnate da una radiazione ionizzante.* – Potremo distinguere i seguenti casi: *a*) le particelle ionizzanti sono protoni di rinculo generati dalla radiazione stellogena neutra superiormente ai contatori; *b*) la radiazione ionizzante trae origine da una esplosione nucleare avvenuta superiormente ai contatori nella quale, oltre alla particella che scarica un contatore viene emesso il neutrone che genera la stella nella camera; *c*) la radiazione ionizzante deriva dalla stessa stella.

Gli eventi *a*) e *b*) dovrebbero manifestarsi soprattutto nelle misure 45 $\overline{P}$, ma si è valutato che l'evento *a*) è inferiore all'1 % delle *S* e l'evento *b*) è molto minore. Limiteremo pertanto la discussione all'evento *c*).

Come è noto tra i prodotti delle evaporazioni nucleari sono stati osservati particelle α, protoni, mesoni e si ha ragione di ritenere che nelle stelle vengano emessi in media 5 neutroni.

Poichè il taglio effettuato dai nostri contatori è superiore a 100 MeV per

---

(11) Vedasi, ad es., G. Bernardini et al. citato in (2); G. Wataghin: *Phys. Rev.*, **71**, 453 (1947) e *Phys. Rev.*, **75**, 693 (1949); A. Lovati, A. Mura, G. Salvini e G. Tagliaferri: *Nuovo Cimento*, **6**, 207 (1949); G. Cocconi: *Phys. Rev.*, **75**, 1047 (1949).

(12) Non è però escluso che una frazione di stelle possa essere generata da mesoni μ come è mostrato dalle esperienze eseguite sotto terra (J. Evans e E. P. George: *Nature*, **164**, 20 (1949).

particella α, è senz'altro da escludere un loro contributo, in base allo spettro delle particelle emesse nelle evaporazioni nucleari ([13]).

I neutroni emessi nelle stelle non possono dar luogo ad una coincidenza se non generino protoni di scambio o di rinculo. Un effetto del genere si dovrebbe avere prevalentemente nelle misure $2P$, ma, dato lo spettro dei neutroni emessi nelle stelle ed il taglio dei contatori, risulta trascurabile la probabilità che un protone di conversione o di rinculo, possa scaricare un contatore.

Il contributo dei mesoni di energia minore di 40 MeV è piccolo, come è mostrato dai dati ottenuti con lastre fotografiche e da misure in corso con lo stesso dispositivo descritto, facendo uso di coincidenze ritardate e 5 cm di grafite interposta tra camera e contatori.

Rimane da discutere il contributo dato dai mesoni con un percorso maggiore di 5 cm di grafite, e dai protoni con un percorso superiore allo spessore di materiale interposto tra la camera ed i contatori. Tale discussione verrà svolta nel n. 5.

2) *Stelle generate da radiazione stellogena ionizzante.* – La frequenza di tali eventi verrà indicata nel seguito con la lettera P in quanto, esclusa una piccola percentuale di mesoni, la frazione ionizzante della radiazione stellogena sembra sia costituita da protoni.

5. – Conclusioni.

A) Come prima conclusione cercheremo di valutare sulla base dei nostri dati il valore N/P in funzione del taglio τ. Secondo la discussione precedentemente svolta tale rapporto risulta maggiore di $(S-K)/K$ in quanto non tutte le K sono dovute alla radiazione stellogena ionizzante. Per poter ricavare dalle nostre misure il valore del rapporto N/P occorrerebbe conoscere la frazione x delle stelle che presentino almeno un ramo ionizzante capace di scaricare uno dei contatori; tale frazione naturalmente è una funzione del taglio e dello spessore di materia interposta tra la camera ed i contatori. Con i dati delle misure che abbiamo fino ad ora eseguite non è possibile ricavare x; si può tutt'al più ricavarne la frazione di stelle aventi almeno un ramo ionizzante di percorso compreso fra 1,7 e 5,7 g/cm² sottraendo da $(K/S)_{OO}$ il valore di $(K/S)_{\mathrm{Pb}}$ (per i tagli 1,2 α e 1,5 α x è prossimo a zero, mentre è sensibilmente diverso da zero per il taglio 2 α).

Un limite superiore per x_{Pb} relativo ai rami di percorso maggiore di 5,7 g/cm² è ovviamente dato da $(K/S)_{\mathrm{Pb}}$ cioè rispettivamente per i tre tagli (tab. I): $0{,}12 \pm 0{,}01$; $0{,}28 \pm 0{,}04$; $0{,}31 \pm 0{,}04$.

È possibile ricavare N/P in funzione di x facendo l'ipotesi che la proba-

---

([13]) G. CORTINI: *Nuovo Cimento*, **6**, 470 (1949).

bilità che una stella abbia un ramo ionizzante con un potere penetrante superiore ad un dato valore, sia indipendente dalla natura della particella da cui essa è stata generata. Si ha allora:

$$\frac{N}{P}=\frac{S-K}{K-xS}=\frac{1-(K/S)}{(K/S)-x},$$

dove $S-K$ e $K-xS$ rappresentano rispettivamente la frequenza di stelle di origine neutronica o protonica con nessun ramo ionizzante di penetrazione superiore al valore prescelto.

Con tale espressione sono state calcolate le curve riportate in fig. 4 che si riferiscono alle misure 0,2 Pb, le quali ci sembrano fra le altre le più adatte a ricavare N/P, perchè il Piombo assorbe buona parte dei rami penetranti delle stelle mentre non modifica l'intensità della radiazione stellogena.

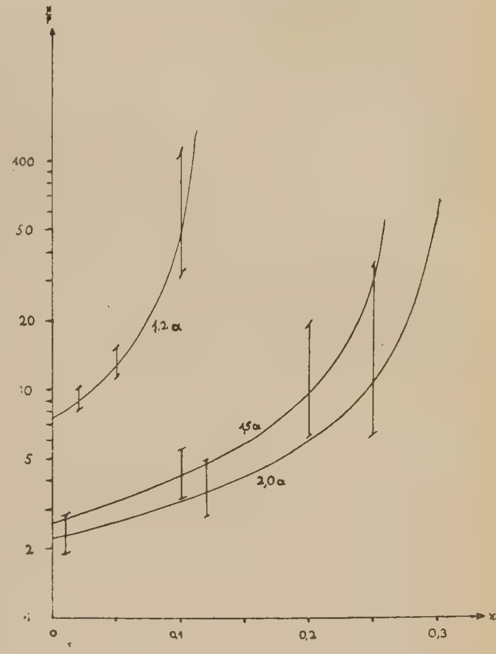


Fig. 4.

Secondo dati forniti dalle lastre (14) riteniamo ragionevole assumere che x_{Pb} per i tre tagli non superi rispettivamente i valori di 0,05; 0,15; 0,18. Con questi valori di trova che N/P risulta compreso fra 7 e 15 per il taglio 1,2 α, mentre per le stelle più grandi esso è compreso fra 2 e 8. Queste conclusioni sono qualitativamente d'accordo con BERNARDINI, CORTINI e MANFREDINI (2), mentre il nostro valore di N/P per stelle di alta energia è forse il doppio di quello calcolato da FERRETTI (6). Si può però osservare che il valore teorico fornito da questo autore si riferisce solo alle stelle generate da una radiazione stellogena di energia compresa fra 200 e 700 MeV, e che inoltre esso dipende notevolmente dalla probabilità q di scambio protone-neutrone. Il valore di tale probabilità che meglio sembra accordarsi con le esperienze di diffusione $N\to P$ a 90 MeV (15) è 0,3; noi abbiamo calcolato, mediante le formule di FERRETTI il rapporto N/P per

(14) Misure in corso di CORTINI e MANFREDINI secondo i quali la percentuale di stelle di più di tre rami, dei quali almeno due di energia maggiore di 80 MeV è l'8 %, mentre per le stelle con più di 5 rami si ha il 12 %.

(15) F. ROHRLICH e J. EISENSTEIN: *Phys. Rev.*, **75**, 715 (1949).

$q = 0{,}2$ e $q = 0{,}5$ trovando rispettivamente 1,3 e 2,1. Se il confronto tra i valori teorici ed i nostri dati sperimentali è legittimo, si deve concludere che le forze di scambio hanno un peso maggiore delle forze ordinarie e che il modello delle forze nucleari fatto attribuendo ad esse lo stesso peso ($q = 0{,}3$) è piuttosto inadeguato.

B) Dal confronto tra le misure *OO* e 45 $\overline{P}$ si può trarre una valutazione del cammino di assorbimento della radiazione stellogena in paraffina. Esso risulta, sia per le misure con taglio 1,5 α che per quelle con taglio 2,0 α, pari a 206 ± 40 g/cm² [16], in buon accordo con i valori forniti dalle misure di HARDING, LATTIMORE, T. T. e D. H. PERKINS [4], i quali trovano con lastre in ghiaccio 200 g/cm². Viceversa dalle nostre misure con taglio 1,2 α risulta per il cammino di assorbimento un valore notevolmente più elevato, che si può interpretare come una indicazione di un effetto di transizione che subisce la radiazione responsabile della produzione delle stelle più piccole nell'attraversare la paraffina.

Questo effetto trova conferma con l'effetto di transizione osservato sotto spessori dell'ordine della decina di g/cm² limitatamente alle stelle di tre rami del gruppo di Roma [2] [17] e recentemente dal gruppo di Padova [18]. Secondo DALLA PORTA, MERLIN e PUPPI [19] tale effetto sarebbe dovuto a neutroni di media energia provenienti dalle evaporazioni nucleari prodotte dalla radiazione stellogena nel materiale assorbitore.

È interessante osservare che per il cammino di assorbimento in paraffina, si ricavano, dalle nostre misure, i medesimi valori, sia dal rapporto tra le S che dal rapporto tra le $S - K$; dal rapporto tra le K si trova invece per il taglio 1,5 α un valore del cammino di assorbimento decisamente inferiore a 200 g/cm². Crediamo di poter interpretare questo fatto assumendo che le perdite di energia per ionizzazione subite dalla radiazione stellogena ionizzante responsabile della produzione delle stelle osservate con taglio tra 1,5 α e 2,0 α ne accorcino sensibilmente il cammino di assorbimento. In base a questa interpretazione si può allora facilmente calcolare dai nostri dati che la percentuale di protoni che generano stelle di energia maggiore di 1,5 α e aventi penetrazione inferiore a 38 g/cm² di paraffina risulta almeno del 30 %.

Per il taglio 1,2 α e 2 α non si verifica tale effetto di assorbimento, ma esso

---

[16] In realtà dato che la paraffina non copriva per intero l'angolo solido attorno alla camera, i valori ricavati dai nostri dati per il cammino di assorbimento costituiscono solo un limite superiore, che però si avvicina al valore reale in quanto si ammette che la r.s. sia prevalentemente verticale.

[17] C. CORTINI e A. MANFREDINI: *Nature*, **163**, 991 (1949).

[18] L. MALASPINA, M. MERLIN, O. PIERUCCI e A. ROSTAGNI: *Nuovo Cimento*, **7**, 145 (1950).

[19] N. DALLA PORTA, M. MERLIN e G. PUPPI: *Nuovo Cimento*, **7**, 99 (1950).

potrebbe risultare mascherato dall'effetto di transizione nel 1° caso; mentre nel secondo è trascurabile dato che si tratta di radiazione stellogena presumibilmente di elevata energia.

Il nostro ringraziamento va ai proff. E. AMALDI, G. BERNARDINI e B. FERRETTI per le utili discussioni avute con loro su questo argomento.

SUMMARY

In this preliminary note we have summarized in tab. I and II the experimental results which we have obtained with a fast ionization chamber in coincidence with 28 G.M. counters (fig. 2 and 3). In the tables S denotes the number of the ionization bursts per hour in the chamber and K the coincidences per hour between counters and chamber. It is shown that excluding a small contribution given by extensive air showers, events S are nuclear disintegrations in the chamber and events K are given by: (a) stars generated by an ionizing radiation and (b) stars produced by neutral radiation with one or more ionizing penetrating prongs. We cannot directly evaluate the ratio N/P between the rates of stars produced by neutral radiation (neutrons) and stars produced by a ionizing radiation (protons and π-mesons); however if we assume that the probability of production of prongs of given energy is the same for stars produced by neutrons or protons we find $N/P = (1-(K/S)_{\text{Pb}})/((K/S)_{\text{Pb}}-x)$ where $(K/S)_{\text{Pb}}$ is the ratio between coincidences and ionization bursts with 5,7 g/cm^2 of absorber between the chamber and the counters, and x is the ratio of the number of stars with one or more prongs of range greater than 5,7 g/cm^2, to the total number of stars. We find that N/P is of the order of $7 \div 15$ for stars of total energy given by 6,5 MeV, and $2 \div 8$ for 8,1 and 10,8 MeV. We have measured the absorption path of stars producing radiation in Paraffin and we found 206 ± 40 g/cm^2.

IL NUOVO CIMENTO Vol. VII, N. 4 2 Luglio 1950

Sugli sciami penetranti generati in Piombo e Carbonio.

L. Mezzetti e R. Querzoli (*)

Istituto di Fisica dell'Università, Centro di studio per la Fisica Nucleare del C.N.R., Roma

(ricevuto il 29 Aprile 1950)

Riassunto. — Con un dispositivo di contatori di G.M. atto a rivelare sciami penetranti generati da particelle ionizzanti ed aventi penetrazione relativamente piccola si studia la dipendenza della sezione d'urto di generazione dal numero atomico del materiale in cui gli sciami vengono generati e dal numero di particelle ionizzanti contenute nello sciame stesso. Si discutono in dettaglio le possibili cause di errori sistematici che possono influire sui risultati di esperienze eseguite con contatori sulla generazione locale di sciami penetranti. Tenuto conto delle correzioni, dal confronto delle frequenze totali degli sciami registrati si deduce per il rapporto dei cammini liberi medi di generazione il valore $\lambda_{Pb}/\lambda_C = 4,4 \pm 1.0$. L'andamento delle frequenze registrate in funzione del numero dei contatori scaricati (molteplicità sperimentale) è grossolanamente in accordo con le distribuzioni calcolate da Heitler-Janossy.

Lo studio sperimentale delle proprietà e delle modalità di generazione degli sciami penetranti (**) generati dai protoni e neutroni di grande energia contenuti nella radiazione cosmica fornisce risultati che possono essere di guida nell'elaborazione delle teorie sulle interazioni delle particelle nucleari a grandi energie.

Fra le questioni tuttora insolute sono: 1) la dipendenza della sezione d'urto di generazione dal peso atomico del materiale attraversato dalla radiazione

(*) Ora presso il Laboratorio di Fisica dell'Istituto Superiore di Sanità di Roma.
(**) Indicati nel seguito come s.p.

nucleonica; 2) la distribuzione degli s.p. in funzione del numero di particelle presenti nello sciame, nei diversi materiali [1].

Il presente lavoro riferisce sui risultati di una esperienza eseguita allo scopo di portare un contributo alla soluzione dei due problemi anzidetti.

Le misure sono state eseguite nel corso dell'estate e dell'autunno 1949 nel Laboratorio della Testa Grigia (Cervinia) all'altezza di 3 500 m sul livello del mare (pressione media 495 mm Hg).

1. – Descrizione del dispositivo sperimentale.

Il dispositivo sperimentale impiegato è indicato schematicamente nelle fig. 1 (disposizione dei contatori) e 2 (schema a blocchi del selettore elettronico). Tutti i contatori sono del tipo standard interamente metallico, in uso presso il Centro di studio per la Fisica Nucleare di Roma, con diametro efficace di 40 o di 20 mm, e parete di 1 mm di spessore.

Il telescopio ABC (dimensioni di ciascun contatore 4×10 cm^2, distanza fra gli assi dei contatori estremi A e C 32 cm) definisce l'angolo solido della radiazione incidente. Le particelle degli sciami generati nel blocco di materiale β, che nel seguito chiameremo « generatore », incidono sui due gruppi di contatori M e (eventualmente) D, separati da uno spessore di 7,5 cm di piombo. I contatori dei quattro gruppi M, D, E, E', sono connessi ad altrettanti circuiti di addizione; nel gruppo M, i contatori contrassegnati con lo stesso numero sono in parallelo. I contatori del gruppo D sono separati l'uno dall'altro da uno spessore di circa 1 cm di Pb. I quattordici contatori L, che circondano da tutte le parti il telescopio ABC, sono tutti in parallelo.

Il selettore elettronico dà una coincidenza ogni volta che si verifica una coincidenza tripla ABC, che *non sia* accompagnata dalla simultanea scarica di alcuno dei contatori L, nè di due o più contatori in ciascuno dei due gruppi E, E', *e sia* accompagnata dalla scarica di almeno k dei contatori D (dove k può assumere i valori 1, 2): mediante un discriminatore a 7 canali vengono inoltre registrate le frequenze degli eventi di questo tipo che sono accompagnati dalla scarica di almeno j contatori del gruppo M ($j = 1, 2, \ldots, 7$).

I contatori di anticoincidenza L sono disposti in modo che una particella ionizzante che attraversa i contatori C senza attraversare i contatori A e B (cioè non compresa entro l'angolo solido definito dal telescopio) ha una elevata probabilità di attraversare almeno uno dei contatori L. In questo modo

---

[1] Per la bibliografia vedi: W. B. Fretter: *Phys. Rev.*, **71**, 462 (1947); A. Lovati, A. Mura, G. Salvini e G. Tagliaferri: *Nuovo Cimento*, **6**, 207 (1949). Vedi inoltre: H. A. Meyer, G. Schwachheim, A. Wataghin e G. Wataghin: *Phys. Rev.*, **75**, 908 (1949); **76**, 598 (1949); W. B. Fretter: *Phys. Rev.*, **76**, 511 (1949).

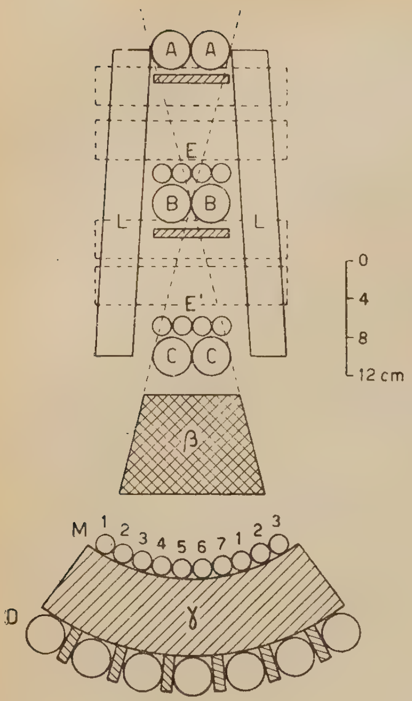


Fig. 1-*a*.

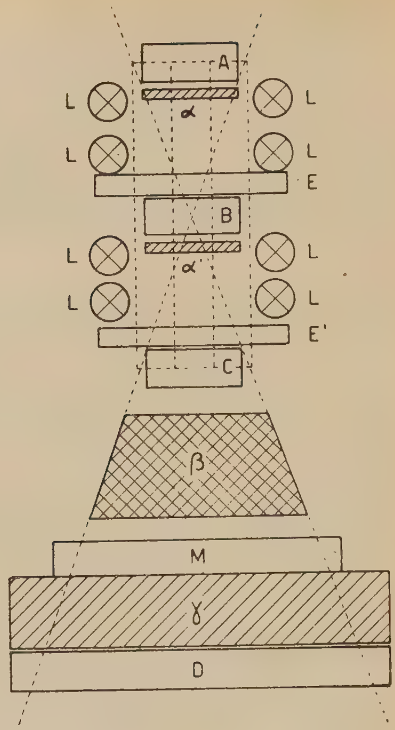


Fig. 1-*b*.

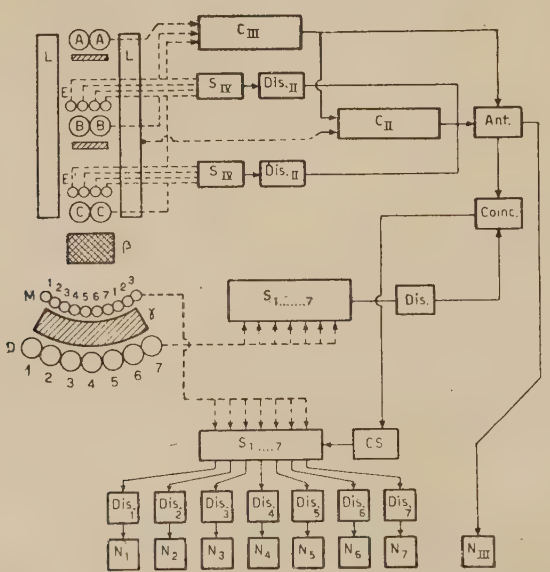


Fig. 2.

il dispositivo risulta almeno parzialmente protetto dagli effetti degli sciami laterali e degli sciami atmosferici; uno sciame laterale capace di dare una coincidenza del tipo descritto, sarà infatti costituito, in generale, da un numero rilevante di particelle ionizzanti, nessuna delle quali deve attraversare i contatori di anticoincidenza.

La condizione che *in ciascuno* dei due gruppi E, E', sia scaricato *un solo* contatore garantisce inoltre, in modo praticamente completo: *a*) che l'evento registrato è dovuto all'incidenza di *una sola* particella ionizzante; *b*) che la particella incidente a cui è dovuto l'evento registrato non è un elettrone; infatti un elettrone può dar luogo ad una coincidenza solo se: 1) attraversa i due strati α ed α' di un cm di piombo ciascuno disposti sopra i due gruppi di contatori E, E' (ad una distanza da questi di circa 10 cm) senza generare secondari ionizzanti, 2) emerge dallo strato di piombo γ, avendo quindi attraversato complessivamente uno spessore di 9,5 cm di Pb; la probabilità di un evento del genere è molto piccola, come vedremo nel n. 3, e diventa ancora minore quando si prendono in considerazione gli eventi in cui più di uno dei contatori M o D sono simultaneamente scaricati.

Un evento del tipo descritto verrà indicato nel seguito con il simbolo $(ABC)M_jD_k$, dove $j = 1, 2, \ldots 7$, $k = 1, 2$.

Come generatore abbiamo usato alternativamente uno spessore di 17 g/cm² di Grafite ed uno spessore di 46 g/cm² di Piombo. Il generatore di Pb era costituito da 10 lastre di 4,1 mm di spessore ciascuna, opportunamente distanziate, in modo da realizzare una geometria confrontabile con quella del generatore di Grafite. Gli spessori sono stati scelti, compatibilmente con le condizioni geometriche, in modo che il loro rapporto fosse uguale al rapporto dei cammini liberi medi corrispondenti alle sezioni d'urto geometriche dei nuclei di C e di Pb, rapporto che è circa 2,6. Gli spessori usati sono inoltre in entrambi i casi abbastanza piccoli rispetto ai liberi cammini medi (pari a circa 1/4 dei liberi cammini medi « geometrici »).

Si osservi che gli spessori scelti risultano, dato il maggior potere frenante del C rispetto al Pb, quasi equivalenti per l'assorbimento di protoni e mesoni di energia non molto elevata.

2. – **Risultati.**

I risultati delle misure del tipo $[(ABC)M_jD_2]$ sono riportati nella tab. 1. Nella prima riga è indicato il numero complessivo di ore di misura eseguite in ciascuna delle tre situazioni ($\beta = 0$, $\beta = 17$ g/cm² C, $\beta = 46$ g/cm² Pb) nelle righe successive sono indicate le corrispondenti frequenze (riferite a 100 h), per i diversi valori di j, da 1 a 7; gli errori indicati sono gli scarti, quadratici medi (« standard deviations »).

TABELLA I.

β	0	17 g/cm² C	46 g/cm² C
h	495,1	505,2	470,1
$j=1$	168 ± 6	176 ± 6	164 ± 6
$j=2$	21 ± 2	49 ± 3	37 ± 3
$j=3$	$7{,}5 \pm 1{,}2$	$24{,}8 \pm 2{,}3$	$20{,}4 \pm 2{,}1$
$j=4$	$3{,}4 \pm 0{,}8$	$12{,}9 \pm 1{,}6$	$12{,}1 \pm 1{,}6$
$j=5$	$1{,}2 \pm 0{,}5$	$6{,}5 \pm 1{,}3$	$7{,}5 \pm 1{,}3$
$j=6$	$0{,}6 \pm 0{,}3$	$2{,}0 \pm 0{,}6$	$5{,}3 \pm 1{,}1$
$j=7$	0	0	$1{,}9 \pm 0{,}6$

In prima approssimazione, cioè a meno delle eventuali correzioni, possiamo considerare come dovute ad esplosioni nucleari generate da particelle ionizzanti incidenti entro l'angolo solido definito dal telescopio ABC nel blocco di materiale β le differenze fra le frequenze misurate con e senza generatore, per $j \geqslant 2$: si tratta, se tale interpretazione è corretta, di sciami contenenti particelle capaci di azionare almeno due contatori D, cioè che hanno attraversato almeno 7,5 cm di Pb; nell'ipotesi che tali particelle siano mesoni, ciò corrisponde ad una energia totale minima, dissipata nel processo, dell'ordine di 1 GeV.

Le coincidenze del tipo $[(ABC)M_1D_2]$ sono invece da attribuirsi essenzialmente a particelle penetranti singole (per la maggior parte mesoni) che attraversano tutto il dispositivo scaricando un contatore in ciascuno dei due gruppi M e D e che nello spessore di piombo γ generano secondari capaci di azionare almeno un altro contatore D.

3. – Correzioni.

Per dimostrare la fondatezza dell'ipotesi fatta, e valutare contemporaneamente le eventuali correzioni, consideriamo gli altri effetti, diversi da quello in esame, che possono dar luogo ad una coincidenza del tipo descritto, che indicheremo per brevità come (M_jD_2), con $j \geqslant 2$; essi devono evidentemente dar ragione, almeno approssimativamente, dell'« effetto di zero », cioè delle frequenze misurate in assenza di generatore. A prescindere da effetti di ordine superiore, che risultano senz'altro trascurabili, essi possono elencarsi come segue:

a) coincidenze casuali;

b) generazione di sciami elettromagnetici (incompleta eliminazione della componente elettronica);

c) generazioni di esplosioni nucleari nell'assorbitore γ, accompagnata da generazione di secondari per urto coulombiano (« knock-on ») in β o nel materiale sovrastante; « knock-on » doppi (in β o nel materiale sovrastante e in γ);

d) esplosioni nucleari nell'assorbitore γ contenenti una o più particelle ionizzanti proiettate all'indietro e capaci di scaricare i contatori M;

e) generazione di s.p. nelle pareti dei contatori e nel materiale sovrastante il generatore β;

f) sciami laterali ed atmosferici (incompleto rendimento delle anticoincidenze laterali).

A) Abbiamo valutato le coincidenze casuali nel modo consueto, tenendo conto di tutte le possibili combinazioni di coincidenze sistematiche e di « singole », misurate a parte. Tenendo conto dei poteri risolutivi dei diversi circuiti di coincidenza si può vedere che i contributi maggiori alle casuali sono dati dalle coincidenze sistematiche in cui si è scaricato uno solo dei contatori M o D rispettivamente (coincidenze del tipo $[(ABC)M_1D_2]$ o $[(ABC)M_jD_1]$) in coincidenza casuale con uno o più degli altri contatori dello stesso gruppo.

Il contributo delle coincidenze casuali alle frequenze misurate è comunque non superiore al 5 % anche nel caso più sfavorevole (eventi del tipo (M_2D_2)) e risulta indipendente dalla presenza del generatore β.

B) Una valutazione esatta del contributo alle frequenze (M_jD_2) dovute ad un residuo della componente elettronica non è possibile per diverse ragioni, prima fra tutte la incertezza dei risultati delle diverse teorie delle cascate elettroniche, particolarmente nel caso in cui il materiale assorbente sia di elevato numero atomico. Si vede infatti facilmente che il rendimento del dispositivo di anticoincidenza da noi adoperato per l'eliminazione della componente elettronica dipende fortemente: 1) dalla forma della curva di moltiplicazione e di assorbimento di uno sciame generato da un elettrone di energia data (ed in particolare dalla posizione del massimo); 2) dalla formula che si assume per rappresentare le fluttuazioni del numero effettivo di elettroni attorno al numero medio. Per queste ragioni ci siamo limitati a fare una stima, sicuramente per eccesso, del numero totale R degli eventi nei quali un elettrone incidente entro l'angolo solido definito dal telescopio genera uno sciame che emerge dall'assorbitore γ con almeno due elettroni capaci di scaricare due contatori del gruppo D senza che contemporaneamente siano scaricati due o più contatori in ciascuno dei due gruppi di anticoincidenza E, E'.

Indichiamo con $f(\varepsilon)\,d\varepsilon$ lo spettro differenziale degli elettroni incidenti, con t lo spessore (in unità di radiazione) del materiale sovrastante ciascuno dei due gruppi E, E', con t' lo spessore totale sovrastante i contatori D; con $P(N, \theta, \varepsilon)$ la probabilità che sotto uno spessore generico θ emergano in totale N elettroni (di energia superiore al taglio delle pareti dei contatori) per ogni elet-

trone di energia ε incidente al di sopra; con $P_n(N, \nu)$ la probabilità che N elettroni incidenti su un gruppo di n contatori diano luogo ad una coincidenza di ordine ν. Abbiamo posto

$$(1) \qquad R \leqslant \int_0^\infty [1 - P(0, t', \varepsilon) - P(1, t', \varepsilon)] \cdot [1 - \sum_{N=2}^{\infty} P(N, t, \varepsilon) p_4(N, 2)]^2 f(\varepsilon)\, d\varepsilon .$$

Come spettro differenziale abbiamo assunto $f(\varepsilon) = k\gamma/(\varepsilon + \varepsilon_0)^{\gamma+1}$, ponendovi $\gamma = 1{,}5$ e scegliendo il valore ε_0 in modo da ottenere accordo con i valori sperimentali dello spettro integrale ottenuti da GREISEN ([2]). Per le probabilità $P(N, \theta, \varepsilon)$ abbiamo posto ([3])

$$P(N, \theta, \varepsilon) = W(\theta, \varepsilon) P_{\text{sec}}(N - 1, \theta, \varepsilon) + [1 - W(\theta, \varepsilon)] P_{\text{sec}}(N, \theta, \varepsilon) ,$$

dove $W(\theta, \varepsilon)$ rappresenta la probabilità di emergenza, sotto lo strato θ, dell'elettrone primario di energia ε, mentre

$$P_{\text{sec}}(N, \theta, \varepsilon) = \frac{1}{\overline{N}_s} \left(1 - \frac{1}{\overline{N}_s}\right)^N ,$$

rappresenta la probabilità che sotto lo spessore θ emergano N elettroni secondari, essendo $\overline{N}_s = \overline{N}_s(\theta, \varepsilon)$ il numero medio, quale si deduce dalla teoria delle cascate. Per la funzione $\overline{N}_s(\theta, \varepsilon)$ abbiamo adoperato i dati più recenti di BHABHA e CHAKRABARTY ([4]), che ci sembrano i più attendibili, calcolando, per ciascuno dei valori di θ e di ε che ci interessavano, il numero medio di elettroni secondari di energia superiore a metà dell'energia critica (nel Pb) che corrisponde all'incirca al taglio delle pareti dei contatori. La funzione $W(\theta, \varepsilon)$ è ben nota, ed è stata tabulata per esempio da ARLEY ([5]).

La distribuzione del numero di elettroni secondari effettivamente emergenti intorno al numero medio è in realtà probabilmente intermedia fra una distribuzione del tipo (2) e la distribuzione di Poisson. L'adozione della formula di distribuzione (2) porta anche essa a sopravalutare il residuo R.

Infine, le probabilità $p_4(N, 2)$ sono state calcolate da noi, nell'ipotesi che ciascuno degli N elettroni emergenti da α (o da α') abbia a priori una probabilità costante $\overline{p} = 0{,}15$ di scaricare ciascuno dei quattro contatori del gruppo E (o rispettivamente E'), mentre è stata assunta $= 1$ (commettendo ovvia-

---

([2]) K. GREISEN: *Phys. Rev.*, **63**, 323 (1943). In realtà lo spettro da noi adottato rappresenta correttamente la componente elettronica a l.d.m., mentre alla quota di 3 500 m s.l.d.m. lo spettro è percentualmente più ricco di elettroni di bassa energia. Ma si può mostrare che l'errore che così si commette porta a sopravalutare l'entità del residuo R.

([3]) Cfr. N. ARLEY: *The theory of Stochastic Processes* (Copenhagen, 1943), pag. 160.

([4]) H. J. BHABHA e S. K. CHAKRABARTY: *Phys. Rev.*, **74**, 1352 (1948).

([5]) N. ARLEY: *Proc. Roy. Soc.*, **168**, 529 (1938).

mente un grosso errore per eccesso) la probabilità che due o più elettroni emergenti dallo spessore γ diano luogo ad una coincidenza doppia fra i contatori D. Un altro notevole errore nello stesso senso deriva dal fatto di avere assunto come indipendenti e corrispondenti al medesimo numero medio le $P(N)$, relative ai due strati α ed α'.

Con le approssimazioni descritte, e ponendo $t = 2$, $t' = 18$ il calcolo numerico della formula (1) dà come risultato in assenza dell'assorbitore β, cioè nel caso più sfavorevole:

$$R \leqslant 0{,}7 \cdot 10^{-2} \text{ h}^{-1} ,$$

pari a circa il 3 % delle coincidenze (M_2D_2) misurate con $\beta = 0$. Date le approssimazioni fatte possiamo perciò considerare il contributo della componente elettronica come assolutamente trascurabile.

C) Per valurate il contributo dovuto ad eventi « doppi » come quelli descritti in *c*), abbiamo, come di consueto, misurato le frequenze degli eventi del tipo (M_jD_1) (con $j = 2, 3, \ldots$) e calcolato le percentuali $(M_jD_1)/(M_1D_1)$ ed $(M_1D_2)/(M_1D_1)$ rispetto alla frequenza (M_1D_1), che rappresenta evidentemente l'intensità della componente « dura » che attraversa il dispositivo sperimentale. Le frequenze ottenute sono in accordo, tenendo conto della diversa geometria, con quelle misurate da altri autori [6]. Le percentuali di eventi doppi si ottengono come prodotto delle due percentuali.

D) Una frazione delle coincidenze (M_jD_2) può essere dovuta ad eventi del tipo *d*). Dalle osservazioni in camera di Wilson di FRETTER [7] risulta però che negli s.p. generati in Pb il numero di particelle ionizzanti capaci di attraversare 1,25 cm di Pb e proiettate sotto un angolo $\geqslant 90°$ rispetto alla direzione di incidenza del primario è circa il 2 % del numero totale di particelle penetranti. Un risultato analogo si può desumere, per le « traccie sottili » delle stelle nelle emulsioni fotografiche, dalle statistiche di BROWN *et al.* [8]. Appare perciò ragionevole assumere che l'entità di questo effetto sia trascurabile, e si può comunque affermare che il suo contributo all'effetto di zero non viene sensibilmente alterato dall'interposizione del generatore di Piombo o di Carbonio, il cui spessore corrisponde ad una piccola frazione del cammino libero medio di assorbimento della componente nucleonica.

Per le stesse ragioni noi pensiamo che le nostre statistiche non possano essere sensibilmente alterate dalla presenza, nelle esplosioni nucleari gene-

---

(6) W. W. BROWN, A. S. MC KAY e E. D. PALMATIER: *Phys. Rev.*, **76**, 506 (1949); P. BASSI e A. LORIA: *Nuovo Cimento*, **6**, 559 (1949).

(7) W. B. FRETTER: *Phys. Rev.*, **76**, 511 (1949).

(8) R. H. BROWN, U. CAMERINI, P. H. FOWLER, H. HEITLER, D. T. KING e C. F. POWELL: *Phil. Mag.*, **40**, 862 (1949).

rate in β, di particelle ionizzanti proiettate all'indietro e capaci di scaricare i contatori di anticoincidenza.

E) Un contributo alle frequenze $(M_j D_2)$ può provenire da s.p. generati nel materiale sovrastante i contatori M. Quasi tutti gli s.p. generati al di sopra del gruppo di contatori E' vengono eliminati dal conteggio per effetto dei due sistemi di anticoincidenza. Vengono invece registrati gli s.p. generati nelle pareti dei contatori E' e C e nel sostegno del generatore β (1 cm di legno). Si può valutare agevolmente questo contributo, che giustifica approssimativamente il 15 % dell'effetto di zero. La presenza del generatore può certamente diminuire l'entità di questo fondo; ma ciò avviene sensibilmente in ugual misura col Piombo o col Carbonio, data l'equivalenza dei due spessori agli effetti dell'assorbimento di protoni e mesoni.

F) Gli effetti precedentemente discussi non sono sufficienti a giustificare completamente l'effetto di zero. Il residuo deve essere attribuito agli sciami laterali, per la non completa protezione delle anticoincidenze. Questa supposizione è convalidata dal risultato di misure ausiliarie, nelle quali sono registrate le frequenze (riferite a 100 h) degli eventi del tipo $[(ABC)M_j D_2]$ in coincidenza, anzichè in anticoincidenza, con i contatori laterali (Tab. II).

Tabella II.

β	0	17 g/cm² C	46 g/cm² C
$j = 1$	132 ± 15	95 ± 11	89 ± 10
$j = 2$	99 ± 12	75 ± 10	64 ± 9
$j = 3$	81 ± 11	51 ± 8	46 ± 8
$j = 4$	61 ± 10	36 ± 7	24 ± 5
$j = 5$	33 ± 7	24 ± 6	19 ± 5
$j = 6$	16 ± 5	11 ± 4	10 ± 4
$j = 7$	non misurate	non misurate	non misurate

È praticamente impossibile valutare l'efficienza della protezione laterale, e quindi l'entità del contributo di questi eventi al fondo delle varie misure. Ma per il confronto che a noi interessa ciò che importa è la dipendenza di questo fondo dalla presenza e dalla natura del generatore β. Assumendo, come ci pare ragionevole, che la parte del fondo dovuta agli sciami laterali presenti la stessa dipendenza dal generatore come le frequenze della tab. II, si può concludere che il contributo degli sciami laterali al fondo nelle misure con generatore è certamente minore dell'effetto di zero misurato e precisamente minore col Pb che con la grafite; ma la differenza fra Pb e grafite non eccede gli errori statistici delle misure.

TABELLA III. – *Misure* $(ABC)\ M_jD_2$ *corrette dagli effetti a), b), c), e).*

β	$j=2$	3	4	5	6	7
0	11 ± 2	$5{,}5 \pm 1{,}2$	$2{,}5 \pm 0{,}8$	$1{,}0 \pm 0{,}5$	$0{,}5 \pm 0{,}3$	0
17 g/cm² C	37 ± 3	$22{,}3 \pm 2{,}3$	$11{,}4 \pm 1{,}6$	$6{,}2 \pm 1{,}3$	$1{,}9 \pm 0{,}6$	0
46 g/cm² Pb	26 ± 3	$17{,}8 \pm 2{,}1$	$10{,}9 \pm 1{,}6$	$7{,}2 \pm 1{,}3$	$5{,}2 \pm 1{,}1$	$1{,}9 \pm 0{,}6$

In tab. III diamo le frequenze $[(ABC)M_jD_2]$ corrette degli effetti *a*), *b*), *c*), *e*), secondo le nostre valutazioni. Gli effetti *d*), *f*) portano, nelle diverse misure, dei contributi che non possono essere valutati. Dalla discussione fatta risulta però che il fondo dovuto agli effetti *d*), *f*) nelle misure con generatore non può certamente essere maggiore dell'effetto di zero residuo; esso è probabilmente minore nelle misure col Pb che in quelle col C, ma la differenza non eccede la metà dell'effetto di zero residuo. In assenza di un criterio più sicuro, preferiamo considerare come dovute a sciami penetranti generati in β le frequenze che si ottengono sottraendo dalle frequenze corrette della tab. III relative al Pb e al C le frequenze relative all'effetto di zero. Un diverso criterio non porterebbe differenze sostanziali nel risultato, almeno ai fini del confronto che ci interessa; il criterio scelto equivale probabilmente a sottovalutare in misura praticamente eguale (e pari a circa il 20 % in entrambi i casi) il numero di sciami generati nei due spessori di Pb e C.

Le differenze corrette sono riprodotte, in funzione della molteplicità sperimentale j, in fig. 3. Gli errori indicati sono solamente gli errori statistici.

4. – **Discussione dei risultati.**

Dalla fig. 3 risulta che il rapporto fra le frequenze totali degli s.p. generati in 17 g/cm² di C e di quelli generati in 46 g/cm² di Pb è $1{,}70 \pm 0{,}41$. Ricordiamo che gli spessori dei due generatori stanno fra di loro nel rapporto $X_{\text{Pb}}/X_{\text{C}} = (A_{\text{Pb}}/A_{\text{C}})^{1/3}$ (A = peso atomico) e sono approssimativamente equivalenti agli effetti dell'assorbimento di mesoni e protoni di energie non molto elevate. Se si ammette che gli spettri e le distribuzioni angolari delle particelle emesse nelle esplosioni generate nel Pb e nel C non siano molto diversi, talchè non sia sensibilmente diversa, nei due casi, la selezione strumentale, dal precedente risultato si può dedurre per il rapporto fra i cammini liberi medi di generazione il valore

$$\frac{\lambda_{\text{Pb}}}{\lambda_{\text{C}}} = 4{,}4 \pm 1{,}0\,. \tag{3}$$

L'eventuale presenza di una componente elettromagnetica associata alla generazione di s.p., può certamente inficiare la precedente interpretazione; si

può tuttavia osservare: 1) che una frazione notevole di s.p. (circa il 50 %) [9] non è accompagnata da processi elettromagnetici; 2) che la selezione più rigida imposta dal nostro dispositivo è quella che richiede la presenza di almeno 2 particelle capaci di penetrare 7,5 cm di Pb; la presenza di una componente elettromagnetica può quindi alterare le frequenze relative alle molteplicità

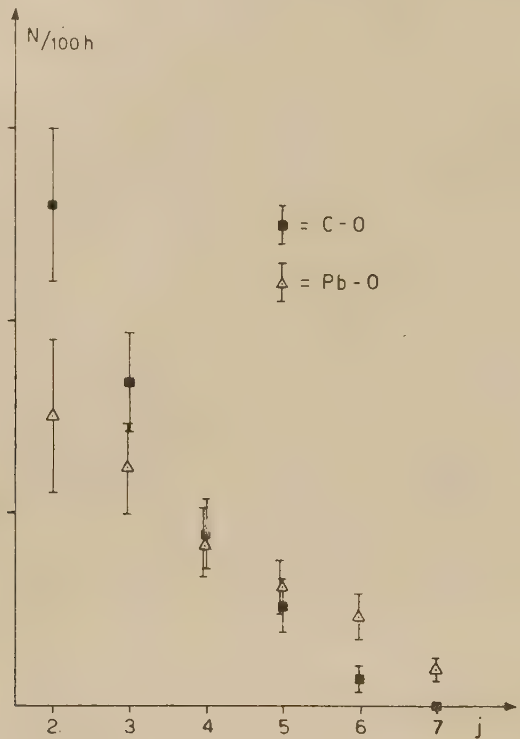


Fig. 3.

più elevate ($j \geqslant 3$) ma non può sensibilmente influire sul numero totale di s.p. registrati ($j = 2$).

Il risultato (3) è compatibile con l'ipotesi che il rapporto delle sezioni d'urto di generazione sia uguale al rapporto delle sezioni d'urto geometriche, in accordo con quanto trovato da TINLOT [10]. Esso sembra invece in contrasto con i risultati di COCCONI [11], che trova per il rapporto (1) il valore $1{,}60 \pm 0{,}17$, e con i più recenti risultati di LOVATI *et al.* [9], che trovano $\lambda_{Pb}/\lambda_C =$

---

[9] W. B. FRETTER: *Phys. Rev.*, **76**, 511 (1949); A. LOVATI, A. MURA, G. SALVINI e G. TAGLIAFERRI: *Nuovo Cimento*, **7**, 36 (1950).

[10] B. GREGORY e I. TINLOT: *Phys. Rev.*, **75**, 516 (1949).

[11] G. COCCONI: *Phys. Rev.*, **75**, 1074 (1949).

$= 0{,}30 \pm 0{,}14$. Il contrasto fra quest'ultimo risultato ed il nostro è forse dovuto, almeno in parte, al diverso criterio di selezione degli s.p. computati nelle loro e nelle nostre statistiche; si può inoltre osservare che gli eventi studiati da LOVATI e coll. e quelli studiati da noi sono prodotti, almeno in parte, da particelle diverse. Le esplosioni nucleari usate da LOVATI e coll. per la valutazione del rapporto anzidetto possono infatti essere dovute anche a particelle secondarie di esplosioni nucleari avvenute nel materiale sovrastante (in totale ~ 146 g/cm² di Pb).

Per quel che riguarda la distribuzione delle coincidenze osservate in funzione del numero dei contatori M scaricati (molteplicità sperimentale) è da osservare anzitutto che tale molteplicità è certamente diversa, e presumibilmente assai minore, del numero effettivo di particelle emesse; in secondo luogo, che essa si riferisce a tutte le particelle cariche (protoni, mesoni, elettroni) eventualmente presenti nello s.p. Nella misura in cui questo confronto è possibile l'andamento delle due distribuzioni in Pb e C non è in contrasto con quello calcolabile secondo HEITLER e JANOSSY [12].

Non è possibile un confronto analogo con la teoria di HEISENBERG e con quella di WATAGHIN [13] i cui risultati, relativi al numero di mesoni emessi nell'urto nucleone-nucleone, non sono certamente applicabili ad un nucleo complesso come quello del Pb. La distribuzione relativa al C non è tuttavia in contrasto nemmeno con una distribuzione alla Heisenberg-Wataghin.

È nostro gradito dovere ringraziare il prof. G. BERNARDINI e il prof. B. FERRETTI per il costante interessamento e le utili discussioni sull'argomento.

---

(12) W. HEITLER e L. JANOSSY: *Proc. Phys. Soc.*, A **62**, 669 (1949).

(13) W. HEISENBERG: *Zeits. Phys.*, **126**, 569 (1949); G. WATAGHIN: *Phys. Rev.*, **74**, 975 (1948).

SUMMARY

The dependence of the generation cross-section of penetrating showers produced by ionising agents upon the atomic number of the material crossed by the primaries has been studied by an arrangement of G.M. counters which was sensitive to showers of comparatively low penetrating power. The frequencies of penetrating showers generated in relatively small thicknesses of Lead and Carbon have been compared and a value $\lambda_{Pb}/\lambda_C = 4.4 \pm 1{,}0$ for the ratio of the collision mean free paths in Lead and Carbon has been deduced. The dependence of the observed production rate upon the total number of ionising particles in the shower has been also investigated and compared with theoretical distributions as given by plural-production and multiple production theories; but the results obtained do not allow to choose between the theories as today formulated.

IL NUOVO CIMENTO Vol. VII, N. 4 2 Luglio 1950

Metodi simbolici di calcolo relativi alla moltiplicazione dei neutroni.

S. Gallone e C. Salvetti
Istituto di Fisica dell'Università e Laboratori CISE - Milano

(ricevuto il 10 Maggio 1950)

Riassunto. — Viene studiata la densità dei neutroni termici in un mezzo (sottocritico) costituito da moderatore e da materiale scindibile; contenente una sorgente di neutroni veloci (mezzo moltiplicante iniettato). Dopo una introduzione di carattere generale sul meccanismo della moltiplicazione dei neutroni vengono esposti alcuni metodi per la trattazione del problema, tutti basati su una forma simbolica risolutiva dell'equazione del rallentamento con diffusione (equazione fondamentale della « age theory »). I metodi si prestano per trattare i diversi problemi di mezzi moltiplicanti di estensione finita in geometrie varie e quelli di mezzi infinitamente estesi: quest'ultimo caso è interessante per il metodo delle immagini. In particolare viene trattato il problema, di notevole interesse applicativo, della colonna cilindrica di altezza finita con sorgente puntiforme: le soluzioni ottenute presentano il vantaggio di una rapida convergenza.

---

1. – Impostazione del problema e ipotesi relative.

Ci si propone in questo lavoro di trattare con metodi simbolici la teoria del rallentamento, della diffusione e della moltiplicazione dei neutroni (in regime stazionario) in un mezzo costituito da moderatore e materiale scindibile, contenente una sorgente di neutroni veloci; tale sistema costituisce un *mezzo moltiplicante* (*mezzo* μ) *iniettato*.

Sul meccanismo del fenomeno in istudio si fanno le seguenti ipotesi:

1) I neutroni della sorgente sono monocinetici.

2) I neutroni di scissione sono anch'essi monocinetici.

3) Il mezzo moltiplicante non cattura i neutroni veloci.

4) Si tiene conto di una eventuale epitermica mediante un fattore di proporzionalità fra le densità a monte e a valle della zona epitermica.

5) Sono applicabili tanto la teoria elementare del rallentamento dei neutroni (*age theory*) quanto la teoria della diffusione nella zona termica.

6) Ai fini della presente indagine il mezzo moltiplicante può considerarsi omogeneo [1].

7) La densità dei neutroni è nulla al contorno di μ; si preciserà in seguito il significato di questa condizione.

2. – Meccanismo della moltiplicazione nei mezzi iniettati.

La presente trattazione si discosta da quella relativa ai reattori nucleari non iniettati (mezzi μ autosostenentisi) per la presenza dei neutroni di sorgente oltre a quelli di fissione.

Pertanto la funzione globale di sorgente dei neutroni veloci consta di due termini:

$$S = S_0 + S_1 ,$$

dove S_0 e S_1 sono le intensità dei due tipi di sorgenti ricordate.

Nella zona termica vale per la densità $\rho(\mathbf{r})$ l'equazione di diffusione che con le notazioni solite scrivesi:

$$D\nabla^2\rho(\mathbf{r}) - \rho(\mathbf{r})/\tau_c + s(\mathbf{r}) = 0 , \tag{2.1}$$

dove $s(\mathbf{r})$ è il numero di neutroni che, per unità di volume e per unità di tempo. entrano nella zona termica, mentre $\rho(\mathbf{r})/\tau_c$ è il numero di neutroni catturato per unità di volume e per unità di tempo nel punto $P(\mathbf{r})$. Parte di questi ultimi, attraverso il fenomeno della scissione, generano i neutroni di moltiplicazione (termine S_1).

Precisando il significato di S_1 come numero di neutroni di scissione prodotti nel punto $P(\mathbf{r})$ per unità di volume e di tempo si ha:

$$S_1(\mathbf{r}) = k_\infty\rho(\mathbf{r})/p\tau_c . \tag{2.2}$$

Attribuito questo significato a $S_1(\mathbf{r})$, $S_0(\mathbf{r})$ ed $S(\mathbf{r})$ sono definite in maniera omogenea con $S_1(\mathbf{r})$.

I neutroni veloci computati in $s(\mathbf{r})$, attraverso il processo di rallentamento confluiscono nella $s(\mathbf{r})$. Occorre pertanto determinare il legame tra $S(\mathbf{r})$ e $s(\mathbf{r})$. Ciò si ottiene utilizzando l'equazione della «age theory» [2] che scrivesi:

$$\frac{\partial\chi(\mathbf{r}, \tau)}{\partial\tau} = \nabla^2\chi(\mathbf{r}, \tau) + S(\mathbf{r}, \tau) , \tag{2.3}$$

---

[1] Per strutture non omogenee ciò equivale a considerare solo la «funzione di grande ripartizione» dei neutroni (cfr. C. Salvetti: *Nuovo Cimento*, **6**, 303, 413 (1949)).

[2] Cfr. R. E. Marshak: *Rev. Mod. Phys.*, **19**, 185 (1947).

dove l'« age » τ è al solito definita da

$$\tau = \frac{1}{3(1 - \cos\vartheta)\xi} \int_{E}^{E_0} l^2(E') \frac{dE'}{E'}$$

e la $\chi(\mathbf{r}, \tau)$ rappresenta la densità di rallentamento: il significato dei simboli è quello stesso usato nel lavoro citato nella nota (1).

Nel caso di neutroni di sorgente monocinetici si ha:

$$S(\mathbf{r}, \tau) = S(\mathbf{r})\delta(\tau) ,$$

e la soluzione formale della (2.3) è:

$$\chi(\mathbf{r}, \tau) = \exp[\tau\nabla^2]S(\mathbf{r}) , \tag{2.4}$$

con le opportune condizioni al contorno (azzeramento della χ, per qualunque τ).

Nel nostro caso la funzione da introdurre nel termine di sorgente è

$$S(\mathbf{r}, \tau) = S_0(\mathbf{r})\delta(\tau) + S_1(\mathbf{r})\delta(\tau - \tau_1) ,$$

dove τ_1 è l'età dei neutroni di moltiplicazione quando si assuma come età « zero » quella dei neutroni di sorgente.

Ciò posto la soluzione di (2.3) è nel nostro caso:

$$\chi(\mathbf{r}, \tau) = \exp[\tau\nabla^2]S_0(\mathbf{r}) + \exp[(\tau - \tau_1)\nabla^2]S_1(\mathbf{r}) ,$$

e per la (2.2):

$$\chi(\mathbf{r}, \tau) = \exp[\tau\nabla^2]S_0(\mathbf{r}) + k_\infty \exp[(\tau - \tau_1)\nabla^2]\rho(\mathbf{r})/p\tau_c , \tag{2.5}$$

che è valida fino a energie a monte delle quali non si verifichino catture. Ora per l'ipotesi (4) del n. 1, la densità di rallentamento a valle della regione di cattura (epitermica) si ottiene moltiplicando la (2.5) per un « fattore di riduzione » che è, per definizione, il fattore di trasparenza alle risonanze p. Pertanto il termine di sorgente dei neutroni termici scrivesi:

$$s(\mathbf{r}) = p \exp[\tau\nabla^2]S_0(\mathbf{r}) + k_\infty \exp[(\tau - \tau_1)\nabla^2]\rho(\mathbf{r})/\tau_c , \tag{2.6}$$

dove τ è l'età dei neutroni termici.

L'equazione generale valevole per i mezzi μ nella zona termica è pertanto:

$$L^2\nabla^2\rho(\mathbf{r}) + (k_\infty \exp[\tau\nabla^2] - 1)\rho(\mathbf{r}) + \tau_c p \exp[\tau_0\nabla^2]S_0(\mathbf{r}) = 0 , \tag{2.7}$$

dove con τ_0 e τ si sono indicate rispettivamente le età dei neutroni di sorgente e di scissione, precedentemente denotate con τ e $\tau - \tau_1$: tale notazione verrà mantenuta nel seguito.

Le condizioni da porre al contorno σ di μ sono:

$$[\nabla^{2n}\rho(\mathbf{r})]_\sigma = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) . \tag{2.8}$$

Queste condizioni si ricavano facilmente tenendo presente che $\chi(\mathbf{r}, \tau)$ deve

essere nulla su σ (per qualsiasi τ) e pertanto derivando successivamente rispetto a τ la (2.5) si ha

$$[\nabla^{2n}\chi(\mathbf{r},\tau)]_\sigma = 0\,,$$

condizione ovviamente valida anche per $s(\mathbf{r})$:

$$(2.9)\qquad [\nabla^{2n}s(\mathbf{r})]_\sigma = 0\,.$$

Imponendo infine anche alla $\rho(\mathbf{r})$ di annullarsi al contorno segue facilmente da (2.9) e da (2.1) la (2.8).

3. – Impostazione del problema in forma integrale (equazione integro-differenziale per la densità termica).

Nel numero precedente si è visto che l'introduzione della soluzione simbolica della equazione del rallentamento (« age theory ») nella equazione di diffusione dei neutroni termici porta ad una equazione differenziale (la (2.7)) di ordine ∞. Le soluzioni di tale equazione con le condizioni appropriate al contorno risolvono interamente il problema.

Qui vogliamo mostrare che lo stesso problema si può trattare mediante una equazione integro-differenziale cui deve soddisfare la densità dei neutroni termici $\rho(\mathbf{r})$.

All'uopo indichiamo con $\chi_\sigma(\mathbf{r},\mathbf{r}',\tau)$ la soluzione all'età τ in $\mathbf{r}$ dell'equazione dell'« age theory » relativa a una sorgente puntiforme di intensità unitaria posta in $\mathbf{r}'$ in un mezzo μ limitato dalla superficie σ. È ovvio che tale funzione dipende dal contorno σ.

In questo caso considerazioni analoghe a quelle già svolte ci consentono di scrivere la seguente equazione integro-differenziale relativa a un mezzo moltiplicante iniettato:

$$(3.1)\qquad L^2\nabla^2\rho(\mathbf{r}) - \rho(\mathbf{r}) + S_0\tau_c p\,\chi_\sigma(\mathbf{r},\mathbf{r}_0,\tau_0) + k_\infty\int \chi_\sigma(\mathbf{r},\mathbf{r}',\tau)\rho(\mathbf{r}')\,d\mathbf{r}' = 0\,.$$

Beninteso l'integrale va esteso a tutto il volume limitato da σ: la sorgente artificiale puntiforme è posta in $\mathbf{r}_0$.

Risolveremo al n. 6 la (3.1) in un caso particolare: la soluzione coincide ovviamente con quella ottenuta attraverso la (2.7) ([3]).

([3]) Cfr. anche E. FERMI: *Science*, **105**, 27 (1947) e A. M. WEINBERG e H. C. SCHWENLER: *Phys. Rev.*, **74**, 851 (1948).

4. – Il metodo delle armoniche.

Questo metodo è applicabile ai mezzi μ finiti: caratteristica del metodo è l'estrema semplicità. Esso consiste nello sviluppare la densità $\rho(\mathbf{r})$ e la funzione di sorgente $S_0(\mathbf{r})$ in serie di autofunzioni $\varphi_n(\mathbf{r})$ della equazione

$$\nabla^2\varphi_n(\mathbf{r}) + \omega_n^2\varphi_n(\mathbf{r}) = 0\,, \tag{4.1}$$

(dove n può rappresentare anche un gruppo di indici) relative alla condizione al contorno

$$[\varphi_n(\mathbf{r})]_\sigma = 0\,, \tag{4.2}$$

che implica naturalmente anche le altre

$$[\nabla^{2k}\varphi_n(\mathbf{r})]_\sigma = 0\,, \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)\,. \tag{4.3}$$

Pertanto anche la

$$\rho(\mathbf{r}) = \sum_n A_n\varphi_n(\mathbf{r})\,, \tag{4.4}$$

soddisfa alle condizioni al contorno (2.8).

Posto

$$S_0(\mathbf{r}) = \sum_n B_n\varphi_n(\mathbf{r})\,, \tag{4.5}$$

dalla (2.7) sostituendo (4.4) e (4.5) e annullando i singoli termini della serie si ha:

$$A_n = \tau_c p B_n \frac{\exp\left[-\tau_0\omega_n^2\right]}{1 + \omega_n^2 L^2 - k_\infty \exp\left[-\tau\omega_n^2\right]} \quad ({}^1). \tag{4.6}$$

---

(1) In tutto il presente lavoro l'operazione $\exp[\alpha\nabla^2]f(\mathbf{r})$ è definita nel modo seguente:

$$\exp[\alpha\nabla^2]f(\mathbf{r}) = \exp[\alpha\nabla^2]\sum_n A_n\varphi_n(\mathbf{r}) = \sum_n A_n \exp[-\alpha\omega_n^2]\varphi_n(\mathbf{r})\,.$$

Ossia si deve sempre intendere che l'operatore $\exp[\alpha\nabla^2]$ operi, e nel modo indicato, sullo sviluppo $\sum_n A_n\varphi_n(\mathbf{r})$ della $f(\mathbf{r})$ in serie di autofunzioni dell'equazione

$$\nabla^2\varphi_n(\mathbf{r}) + \omega_n\varphi_n(\mathbf{r}) = 0\,,$$

relative alle condizioni al contorno:

$$[\varphi_n(\mathbf{r})]_\sigma = 0\,.$$

Nel caso di mezzo indefinito si avrà:

$$\exp[\alpha\nabla^2]f(\mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(\omega)\exp[-\alpha\omega^2]\varphi(\omega, \mathbf{r})\,d\omega\,.$$

La definizione adottata è consistente con i requisiti della « age theory ».

La condizione di criticità per l'armonica n-esima è:

$$1 + \omega_n^2 L^2 = k_\infty \exp[-\tau\omega_n^2]\,. \tag{4.7}$$

Qualora sia $k_\infty > 1$ le dimensioni critiche si ottengono identificando l'autovalore ω di ordine più basso (che dipende manifestamente dalle dimensioni e dalla forma del mezzo μ) con l'unica radice reale positiva β_0 dell'equazione

$$1 + \beta^2 L^2 = k_\infty \exp[-\tau\beta^2]\,. \tag{4.8}$$

Per l'ulteriore illustrazione del significato di β_0 si rimanda agli esempi che seguono.

A titolo di illustrazione del metodo si considerano i seguenti casi di particolare interesse teorico ed applicativo:

a) *Problema unidimensionale.* – Si considera un mezzo μ infinitamente esteso nelle dimensioni x, y e limitato nella terza da due piani posti in $-a$ e $+a$, perpendicolari all'asse z. La sorgente è costituita da un piano emittente di neutroni veloci sito in z', e pertanto la funzione di sorgente è:

$$S_0(z) = S_0\delta(z - z')\,. \tag{4a.1}$$

La (4.1) nel nostro caso diviene:

$$\frac{d^2\varphi_n(z)}{dz^2} + \omega_n^2\varphi_n(z) = 0\,, \tag{4a.2}$$

che con le condizioni al contorno (4.3) dà per le autofunzioni:

$$\varphi_n(z) = \sin\frac{n\pi}{2a}(z + a) = \sin\omega_n(z + a)\,. \tag{4a.3}$$

Lo sviluppo (4.5) del termine di sorgente dà

$$S_0(z) = \frac{S_0}{a}\sum_n \sin\frac{n\pi}{2a}(z' + a)\sin\frac{n\pi}{2a}(z + a)\,, \tag{4a.4}$$

$\left(\text{cioè } B_n = \dfrac{S_0}{a}\sin\dfrac{n\pi}{2a}(z' + a)\right)$.

Per le (4.4), (4.6) si ha per la densità:

$$\rho(z) = \frac{\tau_c p S_0}{a}\sum_n \sin\frac{n\pi}{2a}(z' + a)\sin\frac{n\pi}{2a}(z + a)\times \tag{4a.5}$$

$$\times\frac{\exp\left[-\tau_0\dfrac{n^2\pi^2}{4a^2}\right]}{1 + \dfrac{n^2\pi^2L^2}{4a^2} - k_\infty\exp\left[-\tau\dfrac{n^2\pi^2}{4a^2}\right]}\,;$$

o anche, spostando l'origine su una delle facce in $-a$ e introducendo lo spessore $l = 2a$ si ha:

$$(4a.6)\qquad \rho(z) = \frac{2p\tau_c S_0}{l}\sum_n \frac{\exp\left[-\dfrac{n^2\pi^2}{l^2}\,\tau_0\right]}{1+\dfrac{n^2\pi^2}{l^2}L^2 - k_\infty \exp\left[-\dfrac{n^2\pi^2}{l^2}\,\tau\right]}\sin\frac{n\pi}{l}z'\,\sin\frac{n\pi}{l}z\,.$$

Avendo l'avvertenza di ricordare che in questa formula z' e z sono rispettivamente l'ascissa della sorgente e l'ascissa del punto corrente riferite ad una delle facce.

Lo spessore critico è dato da:

$$(4a.7)\qquad l_c = \frac{\pi}{\beta_0}\,.$$

b) Mezzo sferico con sorgente al centro. – Sia R il raggio della sfera e

$$(4b.1)\qquad S_0(r) = \frac{S_0\delta(r)}{4\pi r^2}$$

la funzione (isotropa) di distribuzione della sorgente puntiforme (S_0 = intensità assoluta della sorgente).

La (4.1) in coordinate polari scrivesi:

$$(4b\ 2)\qquad \frac{\mathrm{d}^2[r\varphi_n(r)]}{\mathrm{d}r^2} + \omega_n^2 r\varphi_n(r) = 0\,,$$

che con le condizioni al contorno (4.3) fornisce per le autofunzioni:

$$(4b.3)\qquad \varphi_n(r) = \frac{1}{r}\sin\frac{n\pi r}{R} = \frac{1}{r}\sin\omega_n r\,.$$

Lo sviluppo (4.5) del termine di sorgente dà:

$$(4b.4)\qquad S_0(r) = \frac{S_0}{2R^2 r}\sum_n n\sin\frac{n\pi r}{R}\,,$$

(cioè $B_n = S_0 n/2R^2$). Per le (4.4), (4.6) si ha per la densità:

$$(4b.5)\qquad \rho(r) = \frac{\tau_c p S_0}{2R^2 r}\sum_n \frac{n\exp\left[-\tau_0\dfrac{\pi^2 n^2}{R^2}\right]}{1+\dfrac{n^2\pi^2}{R^2}L^2 - k_\infty\exp\left[-\tau\dfrac{n^2\pi^2}{R^2}\right]}\sin\frac{n\pi}{R}r\,.$$

Il raggio critico è dato da:

$$(4b.4)\qquad R_c = \frac{\pi}{\beta_0}\,,$$

che mostra, come del resto la (4*a*.7), l'importanza della radice β_0 della (4.8) ai fini della determinazione del raggio critico e pertanto β_0 si può veramente considerare il parametro caratteristico del mezzo μ: esso compendia natura e purezza dei materiali, simmetria del reticolo, dimensioni delle celle elementari di Wigner-Seitz, ecc. Esso è propriamente il *parametro di costruzione* di un reattore.

Nel caso $R_c \gg \pi\sqrt{\tau}$ si ha ovviamente per β_0 l'espressione approssimata:

$$\beta_0 = \frac{\pi}{R_c} \sim \sqrt{\frac{k_\infty - 1}{L^2 + k_\infty \tau}}\,, \tag{4b.7}$$

che fornisce la ben nota espressione del raggio critico per un reattore di dimensioni ordinarie.

c) Mezzo parallelepipedo. – Siano a_1, a_2, a_3 i lati del parallelepipedo e la terna degli assi coordinati sia scelta con l'origine in uno dei vertici e con gli assi (x_1, x_2, x_3) diretti secondo i tre spigoli ivi confluenti. Le facce si trovano pertanto in $x_1 = 0$, $x_1 = a_1$; $x_2 = 0$, $x_2 = a_2$; $x_3 = 0$, $x_3 = a_3$.

La sorgente puntiforme collocata in x_1', x_2', x_3' è rappresentata da:

$$S_0(x_1, x_2, x_3) = S_0\delta(x_1 - x_1')\delta(x_2 - x_2')\delta(x_3 - x_3')\,. \tag{4c.1}$$

La (4.1), operata una separazione di variabili del tipo

$$\varphi_n(x_1, x_2, x_3) = \varphi_{n_1}(x_1)\varphi_{n_2}(x_2)\varphi_{n_3}(x_3)\,,$$

si riduce alle tre equazioni:

$$\frac{d^2\varphi_{n_i}}{dx_i^2} + \omega_{n_i}^2\varphi_{n_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, 3)\,, \tag{4c.2}$$

con le condizioni al contorno equivalenti alle (4.3) che si scrivono ora:

$$\left[\frac{d^{2k}\varphi_{n_i}(x_i)}{dx_i^{2k}}\right]_{x_i=0} = \left[\frac{d^{2k}\varphi_{n_i}(x_i)}{dx_i^{2k}}\right]_{x_i=a_i} = 0 \qquad (k = 0, 1, 2, \dots;\ i = 1, 2, 3)\,. \tag{4c.3}$$

L'autovalore della (4.3) è dato ora da

$$\omega_n^2 = \omega_{n_1,n_2,n_3}^2 = \sum_i \omega_{n_i}^2\,. \tag{4c.4}$$

Ribattezzati gli indici e le coordinate in modo ovvio si vede che, sotto queste condizioni, le autofunzioni sono date da

$$\begin{aligned}\varphi_{l,m,n}(x, y, z) &= \sin\frac{l\pi x}{a_1}\sin\frac{m\pi y}{a_2}\sin\frac{n\pi z}{a_3} = \\ &= \sin\omega_l x \cdot \sin\omega_m y \cdot \sin\omega_n z\,, \quad (l, m, n = 1, 2, 3, \dots)\,.\end{aligned} \tag{4c.5}$$

Lo sviluppo del termine di sorgente dà:

$$(4c.6)\qquad S_0(x, y, z) = \frac{8S_0}{a_1a_2a_3} \sum_{l,m,n} \sin\frac{l\pi x'}{a_1}\cdot\sin\frac{m\pi y'}{a_2}\cdot\sin\frac{n\pi z'}{a_3}\times$$
$$\times\sin\frac{l\pi x}{a_1}\cdot\sin\frac{m\pi y}{a_2}\cdot\sin\frac{n\pi z}{a_3},$$

$\left(\text{cioè}\quad B_{l,m,n} = \dfrac{8S_0}{a_1a_2a_3}\sin\dfrac{l\pi x'}{a_1}\cdot\sin\dfrac{m\pi y'}{a_2}\cdot\sin\dfrac{n\pi z'}{a_3}\right).$

Per la densità si ha infine

$$(4c.7)\qquad \rho(x, y, z) = \frac{8S_0\tau_c p}{a_1a_2a_3}\sum_{l,m,n}\sin\frac{l\pi x'}{a_1}\cdot\sin\frac{m\pi y'}{a_2}\cdot\sin\frac{n\pi z'}{a_3}\times$$
$$\times\sin\frac{l\pi x}{a_1}\cdot\sin\frac{m\pi y}{a_2}\cdot\sin\frac{n\pi z}{a_3}\,\frac{\exp[-\omega^2_{l,m,n}\tau_0]}{1+\omega^2_{l,m,n}L^2-k_\infty\exp[-\omega^2_{l,m,n}\tau]},$$

dove

$$(4c.8)\qquad \omega^2_{l,m,n} = \pi^2\left[\left(\frac{l}{a_1}\right)^2+\left(\frac{m}{a_2}\right)^2+\left(\frac{n}{a_3}\right)^2\right].$$

Le dimensioni critiche si raggiungono per:

$$(4c.9)\qquad \omega^2_{1,1,1} = \pi^2\left(\frac{1}{a_1^2}+\frac{1}{a_2^2}+\frac{1}{a_3^2}\right) = \beta_0^2.$$

In particolare per un reattore cubico segue la formula:

$$(4c.10)\qquad a_c = \frac{\pi\sqrt{3}}{\beta_0},$$

che nell'approssimazione $a_c \gg \pi\sqrt{3\tau}$ fornisce la ben nota relazione:

$$(4c.11)\qquad a_c \sim \pi\sqrt{\frac{3(L^2+k_\infty\tau)}{k_\infty-1}} = \sqrt{3}\,R_c,$$

dove R_c è il raggio critico di un mezzo μ sferico di uguale costituzione e struttura.

d) Mezzo cilindrico. – Siano R e a il raggio e l'altezza del cilindro. Conviene trattare il problema in coordinate cilindriche z, r, φ riferite all'asse del cilindro e con origine nel centro della base inferiore.

Le basi del cilindro sono in $z = 0$ e $z = a$. La sorgente sia posta in z' sull'asse del cilindro. In questo caso, per ovvie ragioni di simmetria, la densità è indipendente dalla coordinata φ.

La funzione di sorgente sarà:

$$(4d.1)\qquad \frac{S_0}{2\pi r}\,\delta(z-z')\delta(r).$$

La (4.1), operata una separazione di variabile del tipo $\varphi_{mn}(z, r) = \psi_m(z)\varphi_n(r)$ si riduce alle due equazioni:

$$(4d.2) \qquad \begin{cases} \dfrac{d^2\psi_m(z)}{dz^2} + \omega_m^2\psi_m(z) = 0\,, \\[2mm] \dfrac{d^2\varphi_n(r)}{dr^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{d\varphi_n(r)}{dr} + \omega_n^2\varphi_n(r) = 0\,, \end{cases}$$

con le condizioni al contorno equivalenti alla (4.3) che si scrivono ora:

$$(4d.3) \qquad \left[\frac{d^{2k}\psi_m}{dz^{2k}}\right]_{z=0} = \left[\frac{d^{2k}\psi_m}{dz^{2k}}\right]_{z=a} = \left[\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)^k \varphi_n\right]_{r=R} = 0 \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

L'autovalore della (4.3) è dato ora da

$$(4d.4) \qquad \omega_{mn}^2 = \omega_n^2 + \omega_m^2\,.$$

Le autofunzioni sono le seguenti:

$$(4d.5) \qquad \psi_m(z) = \sin\frac{m\pi z}{a} = \sin\omega_m z\,; \qquad \varphi_n(r) = J_0(\omega_n r)\,.$$

Gli autovalori ω_n sono determinati da:

$$(4d.6) \qquad \omega_n = x_n/R\,,$$

dove x_n è la n-esima radice della funzione di Bessel J_0.

Lo sviluppo del termine di sorgente conduce alla seguente formula [5]:

$$(4d.7) \qquad S_0(z, r) = \frac{2S_0}{\pi a R^2}\sum_{m,n}\frac{1}{J_1^2(x_n)}\sin\frac{m\pi z'}{a}\sin\frac{m\pi z}{a}\,J_0\left(\frac{x_n r}{R}\right)$$

$\left(\text{cioè } B_{mn} = \dfrac{2S_0}{\pi a R^2 J_1^2(x_n)}\sin\dfrac{m\pi z'}{a}\right)$.

Per la densità si ha infine giuste la (4.6) e la (4.4)

$$(4d.8) \qquad \rho(z, r) \doteq \frac{2\tau_c p S_0}{\pi a R^2}\sum_{m,n}\frac{1}{J_1^2(x_n)}\,\frac{\exp[-\tau_0\omega_{mn}^2]}{1 + \omega_{mn}^2 L^2 - k_\infty\exp[-\tau\omega_{mn}^2]}\times$$
$$\times\sin\frac{m\pi z'}{a}\sin\frac{m\pi z}{a}\,J_0\left(\frac{x_n r}{R}\right),$$

dove

$$(4d.9) \qquad \omega_{mn}^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{x_n}{R}\right)^2.$$

Le condizioni critiche si raggiungono per

$$(4d.10) \qquad \beta_0 = \omega_{11} = \pi\sqrt{\frac{1}{a_c^2} + \frac{(0{,}7655)^2}{R_c^2}}\,.$$

---

[5] Vedi n. 7.

In prima approssimazione si ha:

$$\sqrt{\frac{k_\infty - 1}{L^2 + k_\infty \tau}} \sim \pi \sqrt{\frac{1}{a_c^2} + \frac{(0{,}7655)^2}{R_c^2}}\,. \tag{4d.11}$$

5. – Il metodo dei residui (formula limite per il mezzo μ infinito).

Ci si propone qui di determinare la funzione di densità ρ qualora il mezzo μ sia indefinito in una o più direzioni. In altre parole si vuole risolvere il problema in esame nel caso in cui una parte della superficie limitante il mezzo μ si sposti all'infinito.

In questo caso è facile verificare sugli esempi precedentemente trattati che gli autovalori discreti ω_n tendono a formare uno spettro continuo. Sarà pertanto possibile, con l'ausilio di una opportuna funzione peso, trasformare le $\sum_n$ in integrali. Questo procedimento è del tutto analogo a quello comunemente usato per passare dallo sviluppo in serie di Fourier di una funzione definita in un intervallo finito allo sviluppo in integrale di Fourier di una funzione definita nell'intervallo $(-\infty, +\infty)$.

Il metodo dei residui non costituisce pertanto una nuova trattazione del problema, ma è semplicemente una estensione del metodo delle armoniche a mezzi μ infinitamente estesi in una o più direzioni.

Si ritiene opportuno illustrare direttamente il metodo su alcuni esempi.

a) *Formula limite per il mezzo sferico infinito.* – Si tratta di calcolare l'espressione limite della (4*b*.5) per $R \to \infty$.

Gli autovalori sono dati da:

$$\omega_n = \frac{n\pi}{R}\,, \tag{5a.1}$$

e pertanto il numero di autovolari $\rho(\omega)$ corrispondenti ad una variazione unitaria di ω è dato da

$$\rho(\omega) = \frac{R}{\pi}\,. \tag{5a.2}$$

Ciò posto la (4*b*.5) si può scrivere nel seguente modo:

$$\rho(r) = \frac{\tau_c p S_0}{4\pi^2 r} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega \exp[-\tau_0\omega^2] \sin \omega r}{1 + \omega^2 L^2 - k_\infty \exp[-\tau\omega^2]}\, d\omega = \tag{5a.3}$$

$$= \frac{\tau_c p S_0}{4\pi^2 r i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega \exp[-\tau_0\omega^2 + i\omega r]\, d\omega}{1 + \omega^2 L^2 - k_\infty \exp[-\tau\omega^2]}\,,$$

la quale ha significato solo se non vi sono singolarità sull'asse reale. Questa condizione è soddisfatta se l'equazione

$$\Phi(\omega) = 1 + \omega^2 L^2 - k_\infty \exp\left[-\tau\omega^2\right] = 0\,, \tag{5a.4}$$

non ammette radici reali. È palese che per $k_\infty < 1$ la (5*a*.4) non ha radici reali. Si può quindi affermare che se il mezzo μ è convergente l'integrando della (5*a*.3) non ha singolarità reali.

Denotiamo con β_l ($l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) le radici che cadono nel semipiano (complesso) superiore [6], attribuendo gli indici negativi alle radici con parte reale negativa e gli indici positivi a quelle con parte reale positiva.

Le radici che cadono nel semipiano complesso inferiore [7] sono le complesse coniugate delle precedenti e vengono denotate con β_l^* ($l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) [8].

Osserviamo pure che le singolarità dell'integrando della (5*a*.3) in corrispondenza delle radici β_l del denominatore sono poli del 1° ordine. All'uopo basta assicurarsi che:

$$\lim_{\omega \to \omega_l} \frac{\omega \exp\left[-\tau_0\omega^2 + i\omega r\right](\omega - \beta_l)}{1 + \omega^2 L^2 - k_\infty \exp\left[-\tau\omega^2\right]} \tag{5a.5}$$

sia finito. Ciò si verifica sempre nel caso che stiamo considerando ($k_\infty < 1$) e il residuo a_{-1} dato dalla (5*a*.5) stessa è:

$$a_{-1} = \frac{\exp\left[-\tau_0\beta_l^2 + i\beta_l r\right]}{2\left[L^2 + k_\infty\,\tau \exp\left[-\tau\beta_l^2\right]\right]} = \frac{\exp\left[-\tau_0\beta_l^2 + i\beta_l r\right]}{2\left[L^2 + \tau(1 + \beta_l^2 L^2)\right]}\,. \tag{5a.6}$$

D'altra parte, per $\tau_0 \leqslant \tau$, la funzione integranda per $|\omega| \to \infty$ tende a zero più rapidamente di $1/|\omega|$, in qualunque direzione del semipiano complesso superiore. L'integrale (5*a*.3) si può pertanto facilmente calcolare con il metodo di Cauchy. Si ottiene così per la $\rho(r)$ la seguente espressione:

$$\rho(r) = \frac{S_0\tau_c p}{4\pi r} \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp\left[-\tau_0\beta_l^2 + i\beta_l r\right]}{L^2 + \tau(1 + \beta_l^2 L^2)}\,. \tag{5a.7}$$

Il caso $\tau_0 > \tau$ verrà trattato in una nota successiva.

b) Formula limite per il cilindro di altezza infinita. – Riprendendo le stesse notazioni del caso trattato al n. 4. *d*, e trasportando l'origine degli assi e la sorgente a metà dell'altezza, la (4*d*.8) scrivesi (per *a* finito):

$$\rho(z, r) = \frac{2\tau_c p S_0}{\pi a R^2} \sum_{\substack{m,n \\ (m\ \text{dispari})}} \frac{J_0(\omega_n r)}{J_1^2(\omega_n R)} \frac{\exp\left[-\tau_0(\omega_m^2 + \omega_n^2)\right]\cos\omega_m z}{1 + (\omega_m^2 + \omega_n^2)L^2 - k_\infty \exp\left[-\tau(\omega_m^2 + \omega_n^2)\right]}\,. \tag{5b.1}$$

---

[6] Ossia le radici con $\mathfrak{I}(\beta_l) > 0$.

[7] Ossia le radici con $\mathfrak{I}(\beta_l) < 0$.

[8] Sulle radici della (5*a*.4) cfr. P. R. WALLACE: *Nucleonics*, **4**, n. 2, p. 30 e n. 3, p. 48 (1949).

Passando al limite per $a \to \infty$ si ha:

$$(5b.2)\qquad \rho(z, r) = \frac{\tau_c p S_0}{2\pi^2 R^2} \sum_n \frac{J_0(\omega_n r)}{J_1^2(\omega_n R)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp[-\tau_0(\omega_n^2 + \omega^2)] \cos \omega z \, d\omega}{1 + (\omega_n^2 + \omega^2)L^2 - k_\infty \exp[-\tau(\omega_n^2 + \omega^2)]} .$$

Ponendo:

$$(5b.3)\qquad \omega_{ln} = i\alpha_{ln} = i\sqrt{\omega_n^2 - \beta_l^2} ,$$

dove le ω_{ln} sono le radici dell'equazione:

$$(5b.4)\qquad 1 + (\omega_n^2 + \omega^2)L^2 - k_\infty \exp[-\tau(\omega_n^2 + \omega^2)] = 0 ,$$

che cadono nel semipiano complesso superiore. L'integrale che compare nella (5b.2) è simmetrico rispetto a z, e si può quindi scrivere:

$$(5b.5)\qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp[-\tau_0(\omega_n^2 + \omega^2) + i\omega\,|z|]\, d\omega}{1 + (\omega^2 + \omega_n^2)L^2 - k_\infty \exp[-\tau(\omega^2 + \omega_n^2)]} .$$

Calcolando al solito, per $\tau_0 \leqslant \tau$, tale integrale col metodo di CAUCHY [9] si ha per la densità nel cilindro infinitamente esteso in altezza, l'espressione:

$$(5b.6)\qquad \rho(z, r) = \frac{\tau_c p S_0}{2\pi R^2} \sum_n \frac{J_0(\omega_n r)}{J_1^2(\omega_n R)} \sum_{l,\,-\infty}^{\infty} \frac{\exp[-\tau(\omega_n^2 - \alpha_{ln}^2) - \alpha_{ln}\,|z|]}{\alpha_{ln}[L^2 + k_\infty \tau \exp[-\tau(\omega_n^2 - \alpha_{ln}^2)]} .$$

6. – Soluzioni dell'equazione integro-differenziale (3.1) per il mezzo unidimensionale (casi finito e infinito).

Premettiamo alcune considerazioni sulle proprietà della soluzione $\chi_a(x, y, \tau)$ della « age theory », che simbolicamente si scrive:

$$(6.1)\qquad \chi_a(x, y, \tau) = \exp[\tau D_x^2]\delta_a(x - y) ,$$

dove con $\delta_a(x - y)$ si intende lo sviluppo della funzione δ di Dirac nel sistema di base

$$(6.2)\qquad \varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \sin \frac{n\pi}{2a}(x + a)$$

di autofunzioni soggette ad annullarsi sui piani $x = +a$, $x = -a$.

Precisamente vogliamo dimostrare la seguente proprietà

$$(6.3)\qquad \int_{-a}^{a} [\exp[\tau D_x^2]\delta_a(x - y)] f(y)\, dy = \int_{-a}^{a} \chi_a(x, y, \tau) f(y)\, dy = \exp[\tau D_x^2] f(x) .$$

---

[9] V. osservazione alla fine della sez. (a).

Abbiamo:

$$\delta_a(x-y)=\sum_n \varphi_n(y)\varphi_n(x),$$

ed avendosi

$$D_x^2\varphi_n(x)=-\omega_n^2\varphi_n(x),$$

(con $\omega_n = n\pi/2a$) si ha pertanto

$$\exp[\tau D_x^2]\delta_a(x-y)=\sum_n \varphi_n(y)\exp[-\tau\omega_n^2]\varphi_n(x). \tag{6.4}$$

Sostituendo (6.4) nella (6.3) si ha:

$$\int_{-a}^{a} f(y)\sum_n \exp[-\tau\omega_n^2]\varphi_n(y)\varphi_n(x)\,dy = \tag{6.5}$$
$$=\sum_n \exp[-\tau\omega_n^2]\varphi_n(x)\int_{-a}^{a} f(y)\varphi_n(y)\,dy = \exp[\tau D_x^2]f(x),$$

dove l'ultimo passaggio è conforme alla definizione dell'operatore $\exp[\tau D_x^2]$ data in nota (4).

Procediamo ora alla risoluzione della nostra equazione:

$$L^2\rho''(x)-\rho(x)+S_0\tau_c p\exp[\tau_0 D_x^2]\delta_a(x-x_0)+ \tag{6.6}$$
$$+k_\infty\int_{-a}^{a}[\exp[\tau D_x^2]\delta_a(x-y)]\rho(y)\,dy=0.$$

Poniamo:

$$\rho(x)=\sum_n A_n\varphi_n(x).$$

Ricordando:

$$\delta_a(x-x_0)=\sum_n \varphi_n(x_0)\varphi_n(x),$$

si ha:

$$\exp[\tau_0 D_x^2]\delta_a(x-x_0)=\sum_n \exp[-\tau_0\omega_n^2]\varphi_n(x_0)\varphi_n(x),$$

e quindi sostituendo nella (6.6) si ricava per i coefficienti A_n l'espressione:

$$A_n=\frac{S_0\tau_c p\exp[-\tau_0\omega_n^2]}{1+\omega_n^2L^2-k_\infty\exp[-\tau\omega_n^2]}\varphi_n(x_0), \tag{6.7}$$

e pertanto:

$$\rho(x)=\frac{S_0\tau_c p}{a}\sum_n\frac{\exp[-\tau_0\omega_n^2]}{1+\omega_n^2L^2-k_\infty\exp[-\tau\omega_n^2]}\sin\frac{n\pi}{2a}(x_0+a)\sin\frac{n\pi}{2a}(x+a), \tag{6.8}$$

e pertanto risulta confermata la (4a.5).

Questo procedimento si estende facilmente al caso ∞ e si trova la seguente formula

$$\rho(x) = \frac{S_0 \tau p}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp[-\tau_0\omega^2 + i\omega x]\,d\omega}{1 + \omega^2 L^2 - k_\infty \exp[-\tau\omega^2]}\,, \tag{6.9}$$

che è l'analoga, per il caso unidimensionale, della (5*a*.3).

7. – Il metodo dell'equazione caratteristica. Caso della colonna cilindrica.

Il metodo consiste nel trattare l'equazione dei neutroni termici in un mezzo μ iniettato con una sorgente (monocinetica) puntiforme

$$L^2\nabla^2\rho(\mathbf{r}) - \rho(\mathbf{r}) + k_\infty \exp[\tau\nabla^2]\rho(\mathbf{r}) + \tau_c p S_0 \exp[\tau_0\nabla^2]\delta_\sigma(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0\,, \tag{7.1}$$

come una equazione differenziale a coefficienti costanti d'ordine infinito con le condizioni al contorno (4.2) (4.3).

L'integrale generale della (7.1) sarà pertanto la somma dell'integrale generale dell'equazione omogenea e di un integrale particolare.

Anzichè trattare la (7.1) in generale preferiamo limitarci al caso particolare di grande interesse fisico di una

Colonna cilindrica. – Sia R il raggio del cilindro di lunghezza a. La sorgente S puntiforme sia posta sull'asse del cilindro in z_0. Il problema va trattato ovviamente in coordinate cilindriche. Se, come di consueto, la sorgente è isotropa, la soluzione è indipendente dalla coordinata angolare φ. Il problema ammette dunque l'asse z come asse di simmetria (problema a due variabili). In tali condizioni il laplaciano si scrive:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\,. \tag{7.2}$$

Si cerca una soluzione della forma:

$$\rho(z, r) = \sum_n \psi_n(z)\varphi_n(r)\,, \tag{7.3}$$

dove le $\varphi_n(r)$ sono le autofunzioni dell'equazione:

$$\frac{d^2\varphi_n(r)}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\varphi_n(r)}{dr} + \omega_n^2\varphi_n(r) = 0\,, \tag{7.4}$$

relative alle condizioni al contorno:

$$\begin{cases} \varphi_n(r) = 0\,, \\ \lim\limits_{r\to 0} r\varphi_n(r) = 0\,. \end{cases} \tag{7.5}$$

La (7.4) assieme alle (7.5) definisce le $\varphi_n(r)$ e i relativi autovalori. Si ha:

$$\varphi_n(r) = J_0(\omega_n r)\,, \tag{7.6}$$

dove le ω_n sono definite dall'equazione:

$$J_0(\omega_n R) = 0\,. \tag{7.7}$$

Sviluppo della parte radiale del termine di sorgente in serie di autofunzioni. – Si ha nel caso attuale:

$$\delta_\sigma(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0) = \frac{\delta_R(r)\delta_a(z-z_0)}{2\pi r} \tag{7.8}$$

normalizzata (al solito) all'unità.

Poniamo:

$$\delta_R(r) = \sum_n A_n \varphi_n(r)\,, \tag{7.9}$$

da cui:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^R \delta(r)\varphi_n(r)\,\mathrm{d}r = A_n \int_0^R \varphi_n^2(r) r\,\mathrm{d}r\,.$$

Avendosi:

$$\varphi_n(0) = 1\,,$$

e

$$\int_0^R \varphi_n^2(r) r\,\mathrm{d}r = \frac{[J_1(\omega_n R)]^2}{2} R^2\,,$$

si ha:

$$A_n = \frac{1}{\pi R^2}\,\frac{1}{J_1^2(\omega_n R)}\,,$$

e pertanto:

$$\delta_\sigma(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0) = \frac{\delta_a(z-z_0)}{\pi R^2}\sum_n \frac{J_0(\omega_n r)}{J_1^2(\omega_n R)}\,. \tag{7.10}$$

Il termine di sorgente si può scrivere con le posizioni fatte:

$$\begin{aligned}\tau_c p S_0 \exp[\tau_0\nabla^2]\delta_\sigma(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0) &= \\ &= \tau_c p S_0 \exp[\tau_0 D_z^2]\delta_a(z-z_0)\sum_n A_n \exp[-\tau_0\omega_n^2]\varphi_a(r)\,,\end{aligned} \tag{7.11}$$

e analogamente il termine di moltiplicazione diviene:

$$k_\infty \exp[\tau\nabla^2]\rho(z, r) = k_\infty \sum_n \exp[\tau D_z^2]\psi_n(z)\exp[-\tau\omega_n^2]\varphi_n(r)\,. \tag{7.12}$$

Integrazione sulla variabile z. – Le (7.11) (7.12) permettono di ricavare dalla (7.1) l'equazione per la generica $\psi_n(z)$:

$$\begin{aligned}L^2\frac{\mathrm{d}^2\psi_n(z)}{\mathrm{d}z^2} - (1+\omega_n^2L^2)\psi_n(z) + k_\infty \exp[-\tau\omega_n^2]\exp[\tau D_z^2]\psi_n(z) &+ \\ + s_n \exp[\tau_0 D_z^2]\,\delta_a(z-z_a) &= 0\,,\end{aligned} \tag{7.13}$$

dove s_n è data da:

$$s_n = \frac{\tau_c p S_0}{\pi R^2} \frac{\exp[-\tau_0 \omega_n^2]}{J_1^2(\omega_n R)} . \tag{7.14}$$

L'equazione caratteristica della (7.13) (resa omogenea) è l'equazione trascendente:

$$F(\alpha) = 1 + L^2(\omega_n^2 - \alpha^2) - k_\infty \exp[-\tau(\omega_n^2 - \alpha^2)] = 0 . \tag{7.15}$$

Indichiamo con α_{ln} le radici della (7.15) che cadono nel semipiano $\mathcal{R}(\alpha) > 0$: esse sono legate alle radici β_l della equazione (5*a*.4) dalla relazione:

$$\alpha_{ln}^2 = \omega_n^2 - \beta_l^2 . \tag{7.16}$$

L'integrale generale dell'equazione (7.13) resa omogenea è:

$$\overline{\psi}_n(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} (C_l^{(1)} \exp[\alpha_{ln} z] + C_l^{(2)} \exp[-\alpha_{ln} z]) , \tag{7.17}$$

dove la somma sull'indice l va intesa con le convenzioni del n. 5.*a*.

Estrapolando al caso attuale un risultato valevole nel caso di equazioni differenziali a coefficienti costanti (non omogenee) di ordine n (v. App.) un integrale particolare dell'equazione inomogenea (7.13) può scriversi nella forma:

$$\begin{aligned}\overline{\overline{\psi}}(z) = s_n \sum_{-\infty}^{\infty} \Big\{ & \frac{1}{F'(\alpha_{ln})} \exp[\alpha_{ln} z] \int^{z} \exp[-\alpha_{ln} t] \exp[\tau_0 D_t^2] \delta_a(t - z_0)\, dt + \\ & + \frac{1}{F'(-\alpha_{ln})} \exp[-\alpha_{ln} z] \int^{z} \exp[\alpha_{ln} t] \exp[\tau_0 D_t^2] \delta_a(t - z_0)\, dt \Big\} .\end{aligned} \tag{7.18}$$

L'integrale generale di (7.13) è ovviamente

$$\psi_n(z) = \overline{\psi}_n(z) + \overline{\overline{\psi}}_n(z) . \tag{7.19}$$

Imponendo a (7.19) le solite condizioni al contorno in $z = 0$, $z = a$, invertendo i segni di somma e di integrale e osservando che $F'(\alpha_{ln})$ è una funzione dispari, si ottiene:

$$\begin{aligned}\psi_n(z) = s_n \int_0^a \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{F'(\alpha_{ln}) \operatorname{Sh} \alpha_{ln} a} \{ & \operatorname{Ch} \alpha_{ln}(|z + t| - a) - \\ & - \operatorname{Ch} \alpha_{ln}(|z - t| - a) \} \exp[\tau_0 D_t^2] \delta_a(t - z_0)\, dt .\end{aligned} \tag{7.20}$$

Osserviamo che l'integrale è della forma:

$$\int_0^a f(t) \exp[\tau_0 D_t^2] \delta_a(t - z_0)\, dt ,$$

già vista al n. 6. Applicando la (6.3) si ottiene:

$$\psi_n(z) = s_n \exp[\tau_0 D_{z_0}^2] \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{Ch}\,\alpha_{ln}(|z+z_0|-a)-\mathrm{Ch}\,\alpha_{ln}(|z-z_0|-a)}{F'(\alpha_{ln})\,\mathrm{Sh}\,\alpha_{ln}a}. \tag{7.21}$$

L'applicazione dell'operatore $\exp[\tau_0 D_{z_0}^2]$ alla $\sum_{-\infty}^{\infty}$ eseguita, beninteso, giusta la definizione di nota [4], porta, nel caso $\tau_0 \leqslant \tau$, alla seguente espressione per la densità $\rho(z, r)$.

$$\rho(z,r) = \frac{\tau_c p S_0}{2\pi R^2} \sum_n \frac{J_0(\omega_n r)}{J_1^2(\omega_n R)} \sum_{-\infty}^{\infty}{}_l \frac{\exp[-\tau_0(\omega_n^2-\alpha_{ln}^2)]}{\alpha_{ln}\,\mathrm{Sh}\,\alpha_{ln}a\{L^2+\tau[1+L^2(\omega_n^2-\alpha_{ln}^2)]\}} \times \tag{7.22}$$
$$\times \{\mathrm{Ch}\,\alpha_{ln}(a-|z-z_0|)-\mathrm{Ch}\,\alpha_{ln}(a-|z+z_0|)\}.$$

Questo risultato coincide con quello che si ottiene utilizzando il metodo delle immagini e la legge di distribuzione (5b.6) relativa al cilindro di altezza infinita.

A tal fine basta tener conto dei contributi delle sorgenti (positive) distribuite da $+\infty$ a $-\infty$ lungo l'asse z nei punti

$$z_k = 2ka + z_0 \qquad (k \text{ intero}),$$

e delle sorgenti (negative) poste lungo l'asse z nei punti

$$z_k' = 2ka - z_0 \qquad (k \text{ intero}).$$

La somma di tali contributi porta alla (7.22).

Il metodo qui impiegato può essere di una certa utilità per quelle geometrie in cui il metodo delle immagini sia di laboriosa applicazione.

Desideriamo qui ringraziare vivamente il prof. B. Ferretti per le proficue discussioni sull'argomento.

Appendice

L'espressione (7.18) dell'integrale particolare dell'equazione non omogenea (7.13) si può ricavare facilmente nel caso di equazioni di ordine m finito qualsivoglia.

Infatti in tal caso il metodo della variazione delle costanti di Lagrange fornisce per un integrale particolare l'espressione

$$\bar{\bar{\psi}}(z) = \sum_{l=1}^{m} \exp[\alpha_l z] \int^{z} \frac{W_l(t)}{p_0 W(t)} f(t)\,dt,$$

dove le α_l sono le radici dell'equazione caratteristica; $W(t)$ è il wronskiano

delle $\exp[\alpha_l t]$ e $W_l(t)$ è il complemento algebrico dell'l-esimo elemento della m-esima riga dello stesso, p_0 è il coefficiente del termine di grado più elevato dell'equazione caratteristica, $f(t)$ è il termine noto dell'equazione differenziale data. Si ha:

$$W(t) = \exp[(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m)t]H(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)\,,$$

dove $H(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ è il determinante di Cauchy-Vandermonde delle radici dell'equazione caratteristica.

Inoltre:

$$W_l(t) = \exp[(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{l-1} + \alpha_{l+1} + \dots + \alpha_m)t] \times \\ \times H(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{l-1}, \alpha_{l+1}, \dots, \alpha_m)(-1)^{l+m}$$

Sicchè per una ben nota proprietà dei determinanti di Cauchy-Vandermonde si ha:

$$\frac{W_l(t)}{p_0 W(t)} = (-1)^{l+m} \exp[-\alpha_l t] \frac{\prod\limits_{\substack{r>s \\ (r,s\neq l)}} (\alpha_r - \alpha_s)}{p_0 \prod\limits_{r>s} (\alpha_r - \alpha_s)} = (-1)^{l+m} \frac{\exp[-\alpha_l t]}{p_0 \prod\limits_{s=1}^{l-1} (\alpha_l - \alpha_s) \prod\limits_{r=l+1}^{m} (\alpha_r - \alpha_l)} =$$

$$= (-1)^{2l} \frac{\exp[-\alpha_l t]}{p_0(\alpha_l - \alpha_1)(\alpha_l - \alpha_2) \dots (\alpha_l - \alpha_m)} = \frac{\exp[-\alpha_l t]}{F'(\alpha_l)}.$$

Estrapolando questo risultato al caso di m infinito e tenendo presente che l'equazione caratteristica (7.15) è funzione quadratica delle radici, segue la (7.18).

SUMMARY

The thermal neutron distribution is studied in a multiplying medium containing a fast neutron source. After a short survey on the mechanism of multiplication some methods, based on a symbolical solution of the « age theory » equation, are applied to the problem. These methods are quite adequate for solving various problems concerning multiplying media of finite or infinite extent. The latter case is interesting in view of the application of the « image » method. The particular case of a cylindrical multiplying medium injected by a fast neutron point source is treated in some detail. Rapidly converging solutions are obtained.

Un apparecchio a fotomoltiplicatore per la misura della emanazione del radio.

A. DRIGO
Istituto di Fisica dell'Università - Padova

(ricevuto il 31 Marzo 1950)

Riassunto. — Sono descritti due metodi di misura dell'emanazione radioattiva fondati sull'impiego di un contatore a scintillazione. In entrambi la misura è indiretta, in quanto si risale alla quantità di emanazione dalla misura dell'attività dei depositi solidi di Ra A, Ra B e Ra C. Diversi però sono i metodi di raccolta di questi depositi: per piccole quantità di emanazione, da 10^{-14} a 10^{-16} curie/cm^3 si ricorre al metodo dell'effluvio, nell'aria di un bidone di 50-100 litri, mentre per quantità superiori è sufficiente depositare su un elettrodo carico negativamente quella parte del Ra A che è carico positivamente. Quest'ultimo metodo può servire fino a 10^{-9} curie/cm^3, in un volume di 10 litri. Per quantità ancor maggiori conviene ridurre mediante un diaframma quella parte dell'elettrodo che viene esposta allo schermo fluorescente del contatore.

1. – Considerazioni generali.

BROSER e KALLMANN (1) per primi hanno mostrato nel 1947 la possibilità di effettuare la rivelazione individuale dei raggi α trasformando in impulsi elettrici, mediante un fotomoltiplicatore, le scintillazioni che questi corpuscoli producono quando incidono su un conveniente materiale fluorescente.

Molti sono i dispositivi che, su questo principio, sono stati in seguito sviluppati per la misura dell'attività α dei corpi radioattivi (2). Sono noti d'altra

(1) I. BROSER e H. KALLMANN: *Zeits. f. Naturforschung*, 2, 439 (1947).

(2) Si veda, ad es.: J. D. GRAVES e J. P. DYSON: *R.S.I.*, 20, 560 (1949); B. CASSEN, C. W. REED, L. CURTISS e L. BAURMASH: *Nucleonics*, 5, n. 4, 55 (1949).

parte [3] i procedimenti attraverso i quali si è riusciti ad adattare il contatore a scintillazioni anche alla rivelazione dei raggi β e γ, e di altre radiazioni [4].

Per i raggi α il metodo si presenta semplice e di applicazione più facile di quella che caratterizza altri metodi di rivelazione individuale di questi raggi (v. ad es. contatori proporzionali e a moltiplicazione): consente inoltre una sensibilità che, oltre ad essere assai elevata, grazie al buon rendimento dei contatori a scintillazione, è distribuita in modo abbastanza uniforme su una estensione rilevante (alcuni cm^2). Il fatto che sensibile ai raggi α sia una superficie anzichè un volume, contribuisce infine ad una migliore definizione delle condizioni geometriche che caratterizzano il conteggio.

A quanto mi risulta, il metodo dei contatori a scintillazione non è mai stato, fino ad oggi, applicato alla misura dell'emanazione del radio (Radon) e degli analoghi elementi delle altre famiglie radioattive, cioè del Thoron e dell'Actinon, elementi che, essendo gassosi, e dando origine ad altri elementi, pure radioattivi, rendono più complicati i metodi di misura.

La determinazione della quantità di emanazione presente in un dato volume di gas o di liquido è d'altra parte una misura che interessa frequentemente non solo per la valutazione di questo gas radioattivo, ma anche perchè, qualora si operi in condizioni di equilibrio, dalla misura della emanazione si può risalire a quella dell'elemento da cui proviene [5].

Per questo mi è sembrato che il realizzare un metodo semplice e di grande sensibilità per la misura dell'emanazione radioattiva potesse presentare qualche interesse specialmente nella misura delle piccolissime quantità di emanazione che si trovano nell'aria atmosferica o nell'aria tellurica. Sono infatti quest'ultime misure che, malgrado vengano effettuate con metodi concettualmente ben fondati, danno talvolta risultati un po' incerti trattandosi di misurare quantità prossime al limite della sensibilità realizzabile.

Il metodo per la misura della emanazione radioattiva che mi propongo di descrivere qui è fondato sull'impiego di un contatore a scintillazione capace di rivelare i raggi α e β. È noto [6] che per conferire un significato concreto alle misure di emanazione è necessario fare in modo che questa sia in equilibrio coi suoi derivati a corta vita (Ra A, Ra B e Ra C) o, più semplicemente, evitare che l'emanazione gassosa venga a contatto con il rivelatore, e risalire alla quantità di emanazione dalla misura dell'attività dei depositi di Ra A, Ra B e Ra C formati in determinate condizioni.

---

(3) I. Broser e H. Kallmann: *Zeits. f. Naturforschung*, **2**, 642 (1947); F. H. Marshall, J. W. Coltmann e A. I. Bennet: *R.S.I.*, **19**, 744 (1948); J. W. Coltmann: *Proc. I.R.E.*, **37**, 671 (1949). Ampia bibliografia si può trovare inoltre nell'articolo di M. Ageno, M. Chiozzotto e R. Querzoli in *Nuovo Cimento*, **6**, 217 (1949) e in *Rend. Ist. Sanità*, **12**, 265 (1949). Si veda infine: W. H. Jordan e P. R. Bell: *Nucleonics*, **5**, n. 4, 30 (1949).

(4) Per i neutroni si veda, ad es., W. G. Moulton e C. W. Sherwin: *R.S.I.*, **20**, 766 (1949).

(5) Ciò discende dalla definizione stessa della unità di misura della emanazione, il *curie*. Un curie di emanazione è costituito da $1,78 \cdot 10^{16}$ atomi, e dà origine a $3,7 \cdot 10^{10}$ disintegrazioni per secondo. Questo ultimo numero è stato fissato convenzionalmente con recente decisione (v. ad es., *Nucleonics*, **5**, n. 6, 49 (1949); *Phys. Rev.*, **77**, 142 (1950)).

(6) Si veda, ad es., G. Aliverti e G. Lovera: *Ric. Scient.*, **11**, 235 (1940).

Quest'ultimo metodo, che torna particolarmente utile quando si debbano fare misure in serie, è largamente applicato mediante l'uso di camere di ionizzazione ed elettrometri: per questo ho pensato di conservare anche al dispositivo da me realizzato i vantaggi di questo metodo indiretto, fondato sulla misura dell'attività dei depositi solidi che, con opportuni dispositivi elettrici, possono ottenersi sulla superficie di corpi convenienti.

Siccome però i metodi per ottenere questi depositi attivi possono essere diversi a seconda delle quantità di emanazione da misurare, così di essi sarà data una descrizione separata, malgrado il rivelatore sia il medesimo nei due casi.

2. – Il dispositivo per la rivelazione e il conteggio dei raggi α e β.

Il fotomoltiplicatore (F.M.) usato nella rivelazione delle scintillazioni è del tipo 931 A, scelto tra molti esemplari in modo che la maggiore sensibilità alla luce sia accompagnata dal minimo disturbo di fondo. Quest'ultimo viene ulte-

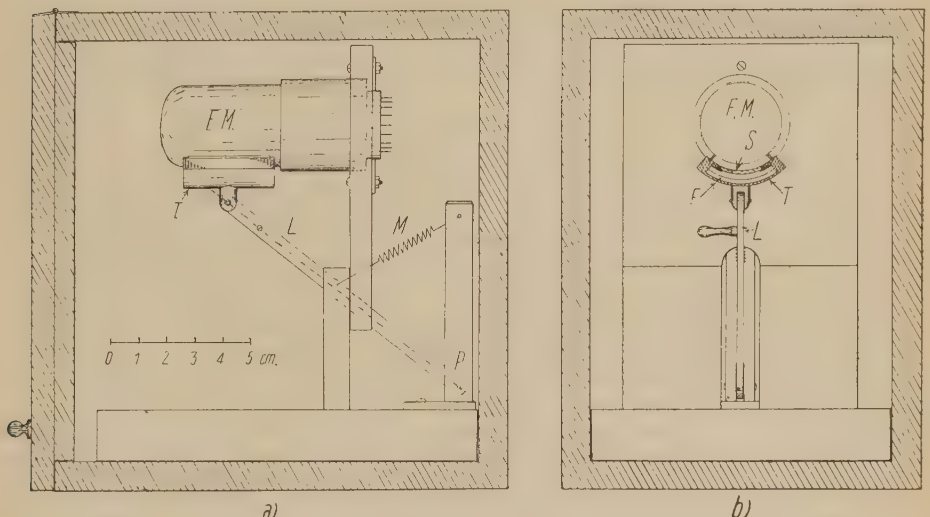


Fig. 1.

riormente ridotto coll'applicazione sul bulbo di vetro di una lamina tenuta ad un potenziale conveniente, come ho recentemente mostrato [7].

È così possibile far lavorare il F.M. col catodo al potenziale prescritto (— 1000 V), e usando una amplificazione successiva superiore a 5000, senza che i più grandi impulsi di fondo superino i 5 V. Tale disturbo è pertanto trascurabile di fronte alla ampiezza degli impulsi da rivelare (da 20 a 80 V), e si elimina completamente con un selettore di ampiezza.

Il F.M. è disposto orizzontalmente in una piccola cassetta, come mostra la fig. 1: la sua finestra è rivolta verso il basso. Un telaio di ottone T, fissato

[7] A. Drigo: *Nuovo Cimento*, **7**, 267 (1950).

a cerniera all'estremità di una leva L, imperniata in P, è tenuto costantemente premuto contro il bulbo del F.M. mediante una molla M. Su di esso però appoggia con l'interposizione di due sottili strisce di bachelite, essendosi riscontrato che il contatto del bulbo con parti metalliche a potenziale diverso da quello assunto dal bulbo, può aumentare i disturbi di fondo.

Il telaio T è destinato a portare il supporto S su cui viene fatto il deposito di atomi provenienti dalla disintegrazione della emanazione. Questo supporto può essere di metallo o di vetro: la sua superficie è di cm $1{,}6 \times$cm $2{,}2$, ed è ricurvo, così da costituire, quando sia posto su T, una porzione di superficie cilindrica coassiale al F.M.

Se si usano supporti metallici il deposito attivo viene fatto sulla parte concava di questi, e la superficie fluorescente in cui si originano le scintillazioni è realizzata facendo aderire sulla superficie di vetro del F.M. stesso un sottilissimo strato di solfuro di zinco attivato con argento: GRAVES e DYSON (8) hanno mostrato che lo spessore optimum di questo strato deve corrispondere a circa 20 mg/cm^2. Data la disposizione, la distanza tra deposito attivo e strato fluorescente risulta costante, di 2,5 mm.

Si possono però usare anche supporti trasparenti, dato che nel caso di misure sull'emanazione anche i depositi attivi sono trasparenti: in tal caso il deposito attivo si può fare sulla parte convessa del supporto e lo schermo fluorescente può essere disposto sul fondo del telaio T, in F, alla distanza di 1,5 mm dalla superficie convessa del supporto. Come schermo fluorescente può servire un cartone fluorescente per radioscopia (9), incurvato in modo da risultare pure esso coassiale al F.M. La luce delle scintillazioni destate in F viene in questo caso rimandata nel F.M. attraverso il supporto stesso.

Si è potuto constatare che lo strato fluorescente deposto sul bulbo del F.M. è così trasparente alla luce di fluorescenza emessa dal cartone F, da non alterare sensibilmente i conteggi delle particelle che vengono emesse dalla superficie convessa del supporto trasparente. Ciò consente di raccogliere i depositi ottenuti dall'emanazione indifferentemente sull'uno o sull'altro tipo di supporti; l'uso contemporaneo dei due strati fluorescenti può inoltre tornare utile per raggiungere una maggiore sensibilità nella rivelazione della attività di corpi di forma particolare (per es. depositi attivi su fili o sottili reticelle).

Il tempo di diseccitazione della sostanza fluorescente usata è dell'ordine di 10^{-5} s (10). Si tratta di un tempo di alcuni ordini di grandezza più lungo di quello che caratterizza la durata dei singoli impulsi di fondo (11): tale differenza di durata, convenientemente sfruttata col dare all'amplificatore costante di tempo paragonabile al tempo di diseccitazione della sostanza fluorescente (12), rende il livello degli impulsi di fondo praticamente trascurabile di fronte a quello degli impulsi di scintillazione.

---

(8) V. (2), l. c., p. 564.

(9) Si intende che i materiali fluorescenti devono possedere una emissione con lunghezza d'onda tale da cadere nel campo di sensibilità spettrale del F.M. usato, campo che per il F.M. 931 A va da 3 500 a 4 500 Å.

(10) F. H. MARSHALL: *Journ. Appl. Phys.*, **18**, 512 (1947); F. H. MARSHALL, J. W. COLTMANN e A. I. BENNETT: *R.S.I.*, **19**, 760 (1948).

(11) V. ad es., G. PAPP: *R.S.I.*, **19**, 568 (1948).

(12) F. H. MARSHALL ed altri: *R.S.I.*, **19**, 755 (1948).

Tuttavia, per innalzare alquanto il numero massimo di disintegrazioni registrabili con tale sistema senza che la sua risposta cessi di essere proporzionale all'attività dei depositi, ho creduto opportuno tenere la costante di tempo all'ingresso dell'amplificatore alquanto più bassa del tempo di diseccitazione, cioè dell'ordine di 10^{-6} s: alla prova dei fatti il disturbo è rimasto facilmente eliminabile con un lieve ritocco del selettore di ampiezza.

L'amplificatore è costituito da due stadi normali con valvole tipo 954 e di uno stadio a cathode follower, realizzato con una 955. L'accoppiamento è diretto tanto tra il F.M. e il primo stadio, come tra il secondo stadio e il cathode follower. Da quest'ultimo si passa ad un selettore di ampiezza costituito da una 6SL7 montata a univibratore, la cui uscita può essere collegata direttamente ad un circuito di demoltiplica dotato di un sufficiente numero di « scale di due ». Attraverso un circuito « trigger », costituito da una 6SF5 e da una 6V6 si aziona infine il numeratore. Due raddrizzatori stabilizzati elettronicamente servono rispettivamente per l'alimentazione del F.M. e per quella di tutti gli altri dispositivi elettronici. Naturalmente nel caso in cui siano da misurare solo debolissime attività il dispositivo di demoltiplica può risultare superfluo o riducibile ad uno o due stadi soltanto.

Il limite superiore dei conteggi effettuabili col dispositivo descritto è risultato, sperimentalmente, di almeno 50 000 disintegrazioni per secondo. Il fondo medio, registrato in assenza di materiali radioattivi, è risultato di 0,6 imp/ora in assenza degli schermi fluorescenti, e di 2,26 imp/ora con gli schermi fluorescenti.

3. – Metodo di misura di quantità di emanazione relativamente elevate.

Questo metodo consente di misurare fino a $10^{-11} \div 10^{-12}$ curie di emanazione, anche se mescolata ad una diecina di litri di altro gas (aria), cioè fino a circa 20 atomi di emanazione per cm^3.

La misura si effettua raccogliendo anzitutto sul supporto S dell'apparato di fig. 1 i depositi attivi di Ra A, Ra B e Ra C, provenienti dalla disintegrazione della emanazione. Si segue un metodo analogo a quello descritto da ALIVERTI e LOVERA [6] per la misura della emanazione presente nelle acque e, più recentemente, da ALIVERTI [13] per la misura dell'emanazione presente nell'aria tellurica.

Poichè all'atto della disintegrazione della emanazione in seno ad un gas gli atomi di Ra A risultano in buona percentuale carichi positivamente [14] e tali si mantengono per qualche tempo, essi possono essere raccolti sulla superficie di un corpo tenuto ad un potenziale negativo di $500 \div 1\,000$ V.

Il supporto su cui va fatto il deposito attivo viene pertanto posto nel centro del vaso in cui si trova il gas contenente l'emanazione da misurare: per ottenere la massima sensibilità nella misura dell'emanazione col metodo da me descritto conviene:

1) che la superficie del deposito abbia estensione comparabile a quella del catodo del F.M.;

---

[13] G. ALIVERTI: *Ann. di Geofisica*, **1**, 372 (1948); *Riv. Geomineraria*, **9** (1948).

[14] S. MEYER e E. SCHWEIDLER: *Radioactivität*, Teubner, Leipzig (1927), pp. 425-26.

2) che il deposito si formi solo su una delle facce del supporto;
3) che nessun deposito si formi su altri corpi.

Per soddisfare a queste due ultime condizioni conviene pertanto che il supporto elettrizzato negativamente rivolga verso il gas solo la faccia da attivare e che nessuna altra parte elettrizzata (conduttrice o no) facente parte del sostegno, possa venire a contatto col gas contenente la emanazione.

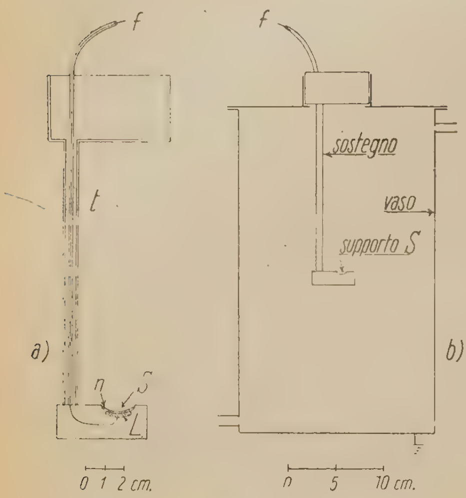


Fig. 2.

La fig. 2, *a*) mostra come è formato il sostegno per il deposito su supporto metallico. Al tubo di ottone *t* è fissato un blocco di ebanite in cui è stata ricavata una nicchia *n*. Sul fondo di questa nicchia è fissata una lamina metallica ricurva *L*, collegabile colla sorgente di potenziale a —500 V mediante il filo *f* che attraversa, isolato, il tubo *t*. Sopra *L* va posto il supporto *S*, per il deposito. Quando il sostegno di fig. 2, *a*) è applicato al vaso coll'emanazione (v. fig. 2, *b*)), il tubo *t* va a terra e a potenziale zero resta anche la superficie dell'ebanite fino all'orlo della nicchia, dato che questo isolante è rivestito di Acquadag.

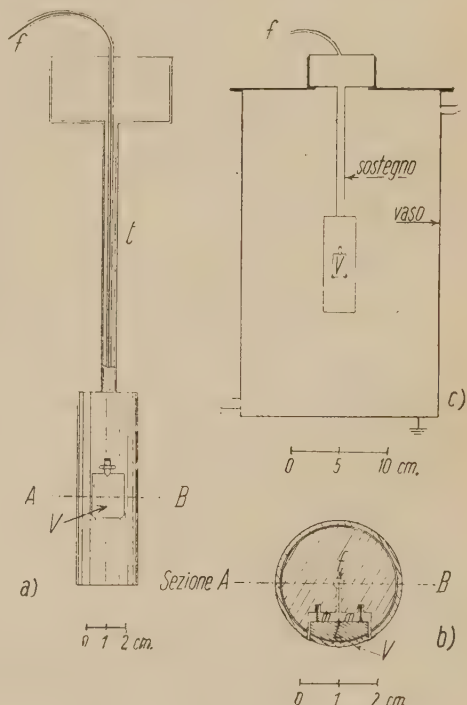


Fig. 3.

La fig. 3, *a*) mostra invece come è costruito il sostegno per effettuare i depositi sul supporto trasparente. Si è trovato che questo può essere fatto di vetro, purchè sia di qualità dotata di resistenza elettrica non troppo alta (vetro al Ca-Mg). La debolissima corrente che si ha durante il processo di raccolta non altera l'elettrizzazione regolare del vetro.

Perchè il supporto *V* riesca l'unica superficie elettrizzata a contatto coll'emanazione, esso viene collocato in una apposita finestra praticata in un involucro di metallo collegato a terra insieme colle pareti del vaso di raccolta. Uno straterello di materiale isolante è interposto tra il vetro *V* e il bordo della finestra. Delle piccole molle *m* premono contro la superficie concava del vetrino

la lamina metallica sottostante che, attraverso il filo f, è tenuta al potenziale di elettrizzazione. Può convenire in tal caso l'uso di un potenziale intorno a $800 \div 1000$ V, negativo.

Il deposito attivo si forma in un tempo che deve essere non inferiore a 2 ore. Va poi analizzato procedendo al rilievo della curva di disattivazione per circa 40 minuti.

Per rendere quantitativo il metodo occorre fissare preventivamente talune condizioni sperimentali, e cioè:

1) il potenziale dato all'elettrodo di raccolta;

2) la durata della raccolta;

3) la forma e il volume del vaso di raccolta: se si tratta di emanazione non liberata dall'acqua può convenire che questo volume sia più piccolo degli

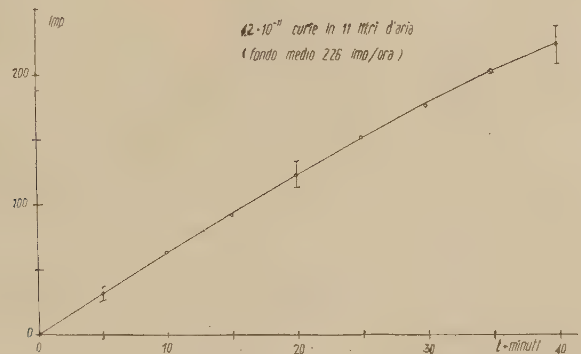


Fig. 4.

11 litri di solito consigliati per una pressochè totale estrazione dell'emanazione dall'acqua;

4) il livello cui è aggiustato il selettore di ampiezza.

Il dispositivo può allora essere *tarato* per es., introducendo nel vaso di raccolta una quantità nota di emanazione, oppure facendo la misura della medesima quantità di emanazione, una volta col metodo di Aliverti e Lovera, e una volta col metodo del F.M.

Da notare che, se l'emanazione si trova mescolata all'aria già prima dell'inizio della raccolta, si può avere del Ra A non in equilibrio e ancora carico, che darebbe quindi una misura dell'emanazione sbagliata per eccesso. Conviene eliminare questo Ra A prima della raccolta definitiva, introducendo nel vaso un largo elettrodo tenuto a conveniente potenziale negativo. La fig. 4 mostra una curva di disattivazione relativa al deposito attivo ottenuto con supporto metallico, in un vaso di 11 litri contenente $4{,}2 \cdot 10^{-11}$ curie.

La tabella che segue mostra infine come resti pressochè costante il rapporto tra le quantità di emanazione da misurare e il numero degli impulsi contati durante i primi 5 minuti di disattivazione dei corrispondenti depositi attivi. Si può dunque ritenere che il dispositivo descritto si presti bene per misure fino a $2 \cdot 10^{-5}$ curie: per quantità superiori sarà sufficiente ridurre mediante un diaframma quella parte della superficie dell'elettrodo che viene esposta allo schermo fluorescente del contatore.

Quantità di emanazione contenuta nel vaso di 11 litri, in curie	Numero degli impulsi nei primi 5 minuti di disattivazione	Numero degli impulsi corrispondente a $1 \cdot 10^{-11}$ curie
$0{,}9 \cdot 10^{-11}$	7	7,77
$4{,}2 \cdot 10^{-11}$	32	7,61
$5{,}23 \cdot 10^{-10}$	396	7,57
$7{,}95 \cdot 10^{-9}$	6 218	7,68
$6{,}80 \cdot 10^{-8}$	52 239	7,68
$7{,}38 \cdot 10^{-7}$	571 993	7,75
$4{,}83 \cdot 10^{-6}$	3 720 620	7,70
$2{,}20 \cdot 10^{-5}$	16 613 208	7,54
$9{,}81 \cdot 10^{-5}$	67 394 107	6,80

Impulsi di fondo in 5 minuti 0,19.

4. – Metodo di misura di quantità di emanazione molto piccole.

Il metodo di raccolta precedentemente descritto raccoglie solo una parte del Ra A. Si comprende pertanto come volendo estendere la sensibilità della misura convenga anzitutto aumentare la percentuale della raccolta, catturando anche il Ra A non elettricamente carico. Se inoltre si tratta di emanazione diluita in altri gas, come avviene per quella dell'aria atmosferica, un ulteriore vantaggio si può avere, almeno fino ad un certo punto aumentando il volume dell'aria sulla quale si fa la raccolta. Elster e Geitel (15) e più recentemente Aliverti (16) hanno fatto ricorso al metodo dell'effluvio per depositare su opportuni elettrodi gli atomi degli elementi radioattivi solidi provenienti dalla disintegrazione dell'emanazione.

Nel metodo Aliverti viene esaminato un rilevante volume d'aria (2 000 litri o più) fatto passare attraverso l'apparecchio a effluvio e misurato con un anemometro, e un ingegnoso metodo sperimentale consente di valutare la percentuale di Ra A che viene fissata sull'elettrodo nelle condizioni adottate. Il medesimo metodo potrebbe senz'altro applicarsi, con opportune modificazioni del sistema di raccolta, sostituendo il F.M. alla camera di ionizzazione coll'elettrometro: occorrerebbe solo modificare il sistema di calcolo per tener conto del numero di particelle α e β ottenibili dai depositi, e non della loro ionizzazione (quella delle particelle β di solito si trascura). Si avrebbe il vantaggio di realizzare così un apparecchio assai più piccolo, con un numero limitato di punte effluvianti e con la possibilità di misurare contemporaneamente

(15) J. Elster e H. Geitel: *Phys. Zeits.*, **2**, 590 (1901); **3** 305 (1902); **4**, 96 e 522 (1903).

(16) G. Aliverti: *Nuovo Cimento*, **8**, 590 (1931); **9**, 313 (1932); G. Aliverti e G. Rosa: *Nuovo Cimento*, **12**, 27 (1935); M. Boriosi: *Nuovo Cimento*, **10**, 286 (1933).

l'attività di ambedue gli elettrodi, onde ricavare per ogni misura il valore della percentuale di raccolta.

Semplici calcoli mostrano però che, col dispositivo a F.M. descritto si può raggiungere una sensibilità sufficiente almeno per le misure di radioattività dell'atmosfera sopra la crosta terrestre, anche solo applicando il metodo dell'effluvio ad un volume d'aria compreso tra 50 e 100 litri, raccolto in un vaso chiuso. Poichè l'esperienza ha confermato questa possibilità, descrivo qui il dispositivo di raccolta, realizzato a questo scopo.

La fig. 5 mostra una sezione schematica dell'apparecchio. In un bidone cilindrico di ottone di 50 litri, normalmente disposto orizzontale, è fissato il ventilatore V, azionato da una batteria di accumulatori. Lungo l'asse del ventilatore, ad una distanza di 15 cm dalla girante, viene disposto il sistema degli elettrodi per l'effluvio.

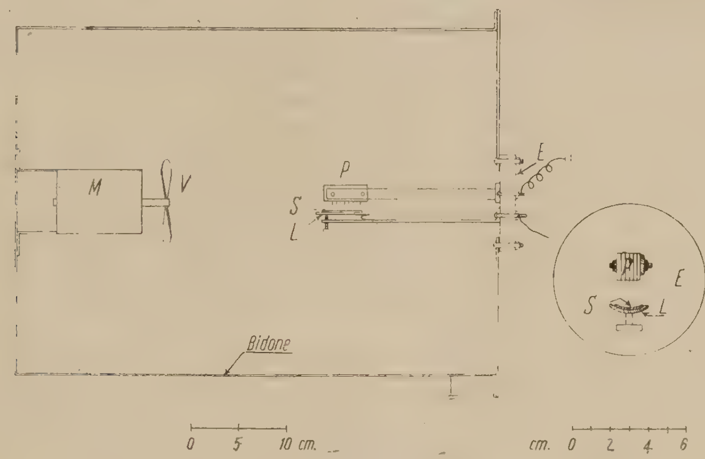


Fig. 5.

Poichè l'effluvio deve concentrarsi su uno dei supporti metallici usati anche nel metodo precedentemente descritto, il sistema per l'effluvio consta di una lamina ricurva L su cui viene appoggiato il supporto metallico S per il deposito, e del blocco porta aghi P dove, alla distanza di 2 mm uno dall'altro, sono fissati 45 aghi, disposti su 5 file.

Entrambi questi elettrodi sono fissati su una piastra di ebanite E che, con opportuna flangia, si applica sull'imboccatura del bidone, chiudendolo ermeticamente. Per produrre l'effluvio si collegano a terra le punte e si dà alla lamina un potenziale di alcune migliaia di volt, alternato o continuo (positivo). Si è trovato che in queste condizioni l'effluvio converge tutto sul supporto se la distanza tra questo e le punte è di 11-12 mm.

Scopo del ventilatore è di dare all'aria nel bidone una lieve agitazione che la costringa a passare ripetutamente attraverso gli elettrodi in effluvio.

Per effettuare una misura si procede anzitutto all'immissione dell'aria da misurare nel bidone, quindi si applicano gli elettrodi e si provoca l'effluvio per una durata di circa 2 ore. Infine si toglie il supporto col deposito e, postolo davanti al F.M., si procede al rilievo della curva di disattivazione, come nel metodo precedente.

In tutte le esperienze fin'ora effettuate, si è trovato che questa curva è esattamente simile a quella del Ra A, a parte qualche lieve anomalia nei primi minuti, che può far sospettare la presenza del Torio A.

Per rendere il metodo quantitativo si può procedere anche in tal caso ad una taratura immettendo nel bidone una quantità nota di emanazione e riferendosi sempre al medesimo potenziale di effluvio, e ad una medesima durata di quest'ultimo.

È stato così accertato che si può giungere per tal via a misurare fino a 1-2 atomi di emanazione per cm^3, il che equivale a $0{,}6 \cdot 10^{-16}$ curie: questo valore, secondo HESS, rappresenta il minimo valore della radioattività dell'aria sopra la superficie terrestre.

La possibilità di effettuare la misura sull'aria di un recipiente chiuso, oltre a rendere meglio definite le condizioni della misura, presenta qualche altro vantaggio, primo tra questi quello di poter ripetere la misura sulla stessa aria, appena ultimato il primo processo di raccolta in essa.

Operando in questo modo ho potuto constatare che talvolta la prima misura fornisce valori del 20-30 % superiori a quelli che si trovano nelle misure successive. Questo mostra che non sempre il Ra A è in equilibrio con l'emanazione dell'atmosfera, come normalmente si suppone nell'applicazione degli altri metodi. La ripetizione della misura dopo una seconda raccolta dà luogo però solo alla deposizione degli atomi di Ra A che si sono formati durante il tempo di raccolta, per cui quest'ultima misura si può ritenere fatta in condizioni di equilibrio radioattivo.

Può darsi infine che, evitando le forti correnti d'aria che caratterizzano gli altri metodi di misura, si giunga ad una più esatta valutazione della radioattività atmosferica, in quanto è stato dimostrato ([17]) che su oggetti esposti a veloci correnti d'aria si ha una sensibile deposizione di radioattività atmosferica anche in assenza di qualsiasi carica elettrica.

5. – **Conclusioni.**

I metodi per la misura dell'emanazione, basati sul contatore a scintillazioni che ho descritto sopra sono attualmente impiegati per misure di uso corrente. In particolare quello ad effluvio viene usato in misure sistematiche della radioattività atmosferica, i cui risultati saranno resi noti altrove.

Mi è gradito ringraziare il prof. A. ROSTAGNI per i consigli e le utili discussioni, e la dott. L. DE MARCO per l'aiuto datomi nelle misure. La mia gratitudine va pure alla Soc. E.I. Du Pont de Nemours, di Towanda, Pennsylvania, che mi ha gentilmente messo a disposizione i materiali fluorescenti.

([17]) S. FREED e M. L. SCHULTZ: *Journ. Franklin Inst.*, **231**, 345 (1941).

SUMMARY

Two methods for determining the amount of radon, based on the use of scintillation counters, are described. In both cases the measurement is made indirectly as the amount of radon is deduced from the measurement of the activity of solid deposits of Ra A, Ra B and Ra C. There are two different methods of collecting the deposits. For small quantities, from 10^{-14} to 10^{-16} curie/cm^3 the method of corona discharge, inside a vessel of 50-100 liters capacity, is used. For larger quantities, up to 10^{-9} curie/cm^3, it is sufficient to deposit that part of Ra A which is positively charged, on a negative electrode. For still larger quantities it is advisable to reduce with a diaphragm that portion of the electrode which is actually exposed to the fluorescent screen of the counter.

Contatori di neutroni a BF_3.

A. Bracci, U. Facchini, E. Germagnoli e E. Zimmer

Laboratori CISE - Milano

(ricevuto il 22 Aprile 1950)

Riassunto. — Si descrivono le caratteristiche e il funzionamento di alcuni contatori proporzionali per neutroni, di costruzione particolarmente semplice, riempiti con BF_3. Si studiano inoltre miscele $A + BF_3$.

---

1. – I contatori proporzionali da noi realizzati e sperimentati sono di due tipi, differenti fra loro per il diametro del tubo e la lunghezza del filo; in quello che indicheremo come il tipo B il diametro interno del tubo (di ottone) è 12,5 mm e la lunghezza del filo è di 255 mm; in quello del tipo C il tubo ha il diametro interno di 25 mm e il filo è lungo 200 mm (vedi fig. 1 e 2).

Si fa uso in entrambi i casi di un anello di guardia, del tipo Stupakoff GE 95.2049, che interrompe l'isolamento fra filo e tubo e, messo a terra, impe-

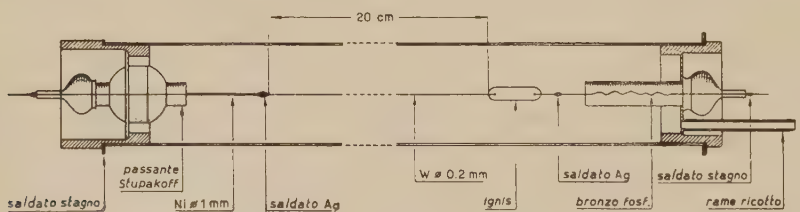


Fig. 1. – Contatore tipo C.

disce eventuali scariche dirette tra i due elettrodi sulla superficie del vetro.

I contatori vengono preparati pulendo dapprima tubi e fili mediante carta smeriglio; quindi i tubi vengono lavati con soluzione di HNO_3 al 10 % e poi risciacquati in acqua distillata, avendo cura che il metallo non venga a contatto con l'aria quando è bagnato con soluzione nitrica (ciò per evitare ossidazioni sulla superficie del catodo). Infine ogni altro pezzo, e con particolare cura i passanti Stupakoff e i fili, viene ripulito con alcool etilico. Subito dopo la pulitura i contatori vengono montati, saldati e attaccati all'impianto di

riempimento, dove vengono mantenuti sotto un vuoto di 10^{-5} mm Hg per parecchie ore e infine riempiti con BF_3. Per eliminare eventuali tracce di vapor d'acqua e acido fluoridrico, il BF_3 viene fatto passare, prima del riempimento, in una trappola raffreddata con miscela di CO_2 solido e acetone.

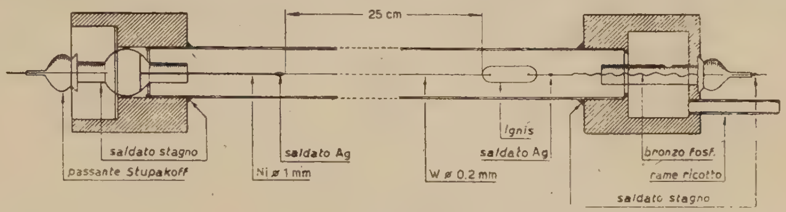


Fig. 2. – Contatore tipo B.

Alcuni contatori sono stati riempiti con miscele Argon-BF_3: in tal caso l'Argon è stato previamente purificato con un depuratore a Calcio alla temperatura di 500 °C.

L'impianto di riempimento usato è metallico, e si è evitato in esso l'uso di grassi e di gomma.

2. – Il BF_3 usato per il riempimento dei contatori è stato preparato per azione di H_2SO_4, contenente disciolto a caldo B_2O_3, su KBF_4 puro nelle proporzioni seguenti:

KBF_4	g	450
H_2SO_4	cm³	1 000
B_2O_3	g	75

Tale miscuglio è contenuto in un pallone di vetro di circa 2 litri (che non viene intaccato durante le operazioni necessarie alla preparazione del BF_3).

Il pallone è connesso all'apparecchiatura di sviluppo, pure in vetro; i giunti e i rubinetti sono lubrificati con vaselina bianca, che resiste all'azione del BF_3, il quale attacca invece i soliti grassi per vuoto a base di caucciù.

L'apparecchiatura è costituita da un refrigerante verticale a circolazione d'acqua, che serve a raffreddare i gas sviluppati dal pallone, da una bottiglia di lavaggio contenente una soluzione satura a freddo di B_2O_3 in H_2SO_4, che serve per eliminare tracce di umidità e di HF eventualmente trascinate dal BF_3, e da una bomboletta di ferro connessa con un tubo di rame alla parte in vetro.

Il tutto viene evacuato fino ad una pressione di circa 10^{-2} mm Hg.

Si scalda poi cautamente il pallone a una temperatura di 150-200 °C; i gas disciolti che si liberano e le prime porzioni di BF_3 che si formano vengono raccolte in una trappola, riempita di carbone attivo previamente riscaldato e degassato, raffreddata con ossigeno liquido. Quando lo sviluppo del BF_3 diviene più abbondante si escludono la trappola e la pompa e si condensa il BF_3 nella bombola raffreddandola con ossigeno liquido, facendo sì che il collo della bombola non assuma una temperatura inferiore a — 120 °C (il punto di fusione del BF_3 è — 126 °C). Si chiude la bombola e si cessa il riscaldamento del pallone quando non si forma più BF_3.

Si ottengono così circa 250 g di BF_3 di purezza intorno al 99 %.

3. – Nella fig. 3 diamo lo schema di assieme del circuito usato per lo studio delle proprietà dei contatori.

Il potenziale (negativo) al catodo era fornito da un generatore di alta tensione stabilizzata al 3 $^0/_{00}$, con tensione di uscita regolabile da 600 a 5000 V; per tensioni più basse si è fatto uso di pile.

Il sistema di amplificazione comprendeva un preamplificatore e un ampli-

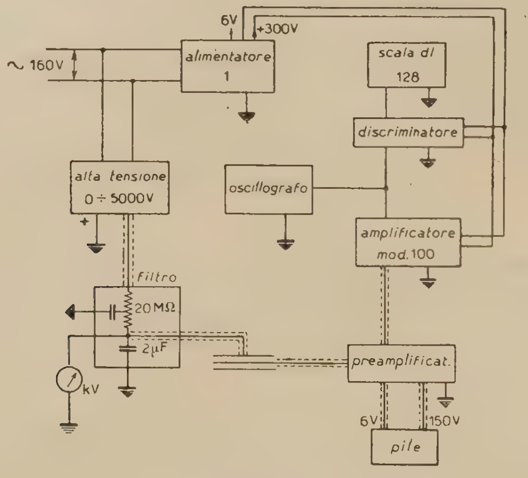


Fig. 3. – Schema di assieme del circuito.

ficatore mod. 100 (1) con guadagno regolabile da circa $2 \cdot 10^3$ a circa $7 \cdot 10^5$; il tempo di salita proprio dell'amplificatore è di circa 0,6 microsecondi.

Il sistema di registrazione e di controllo comprendeva un discriminatore, la cui taratura veniva periodicamente controllata con un generatore di impulsi di altezza regolabile e nota, una scala di 128 e un oscillografo Cossor. Un analizzatore a 99 canali (2) è stato usato per studiare la dispersione in altezza degli impulsi. La misura dei tempi di salita è stata fatta collegando l'uscita dell'amplificatore alla coppia di placche verticali di un oscilloscopio attraverso una linea di ritardo a costanti concentrate di 2 microsecondi: lo stesso impulso all'uscita dell'amplificatore era usato per comandare la traccia sullo schermo oscillografico per mezzo di un sincroscopio.

4. – I contatori venivano sottoposti a un flusso di neutroni lenti proveniente da un « obice » neutronico; tali neutroni erano prodotti da una sorgente Ra-Be di 500 mC. I contatori erano schermati dai raggi gamma emessi dalla sorgente mediante uno strato di circa 6 cm di Pb.

Lo studio delle proprietà dei contatori si è fatto essenzialmente: *a*) ricavando per ognuno di essi la curva che dà il fattore di moltiplicazione M in funzione della tensione V applicata; *b*) studiando, a diversi valori di V, lo

---

(1) W. ELMORE e M. SANDS: *Electronics: Experimental Techniques* (McGraw Hill Book Company Inc., 1949).

(2) E. GATTI: in corso di pubblicazione su *Il Nuovo Cimento*.

spettro delle altezze degli impulsi; *c*) osservando la variazione del numero degli impulsi in funzione di V.

5. – Dall'esame della curva $M = M(V)$ è possibile ricavare buona parte degli elementi caratteristici del contatore. È noto che, fissate le costanti geometriche del contatore, la natura e la pressione del gas usato per il riempi-

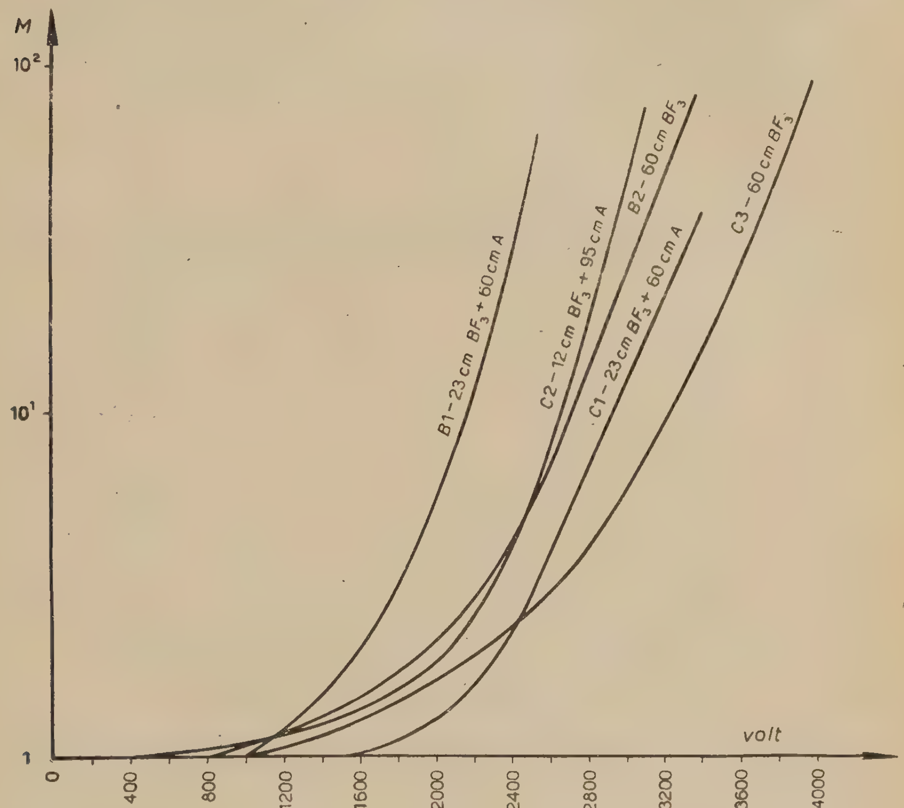


Fig. 4. – Fattore di moltiplicazione M. Volt tensione applicata.

mento, M è funzione univoca di V e cresce con V, in zona di moltiplicazione con legge pressochè esponenziale (3) (4) (5).

L'andamento di M in funzione di V è stato studiato misurando per valori crescenti della tensione l'altezza media degli impulsi e facendo il rapporto tra i valori ottenuti e il valore dell'altezza degli impulsi alla tensione di « satu-

---

(3) B. C. Diven, N. G. Nereson e B. Rossi: *Investigation of proportional Counters*, *L.A.D.C.*, **74** (27-4-1944).

(4) B. Rossi e H. H. Staub: *Ionization chambers and counters; experimental techniques.* (New York, 1949), pag. 72 e seguenti.

(5) S. A. Korff – *Electron and nuclear counters* (New York, 1948).

razione » ossia quando il contatore funziona come una camera di ionizzazione e la collezione degli elettroni è divenuta praticamente completa.

I risultati per i due tipi di contatori e per varie miscele sono illustrati nella fig. 4. Abbiamo esaminato l'andamento di M per valori di $M < 100$ poichè solo per valori compresi in tale intervallo è garantita, secondo la condizione indicata da PONTECORVO e collaboratori [6], una buona proporzionalità tra l'energia delle particelle ionizzanti e l'altezza dei corrispondenti impulsi di tensione. Infatti l'energia liberata nella reazione $B^{10}(n, \alpha)Li^7$ sfruttata per la rivelazione dei neutroni è di 2,2 MeV, e secondo PONTECORVO e collaboratori un contatore mantiene una buona proporzionalità solo se si ha

$$E \cdot M \leqslant 10^8 \text{ eV},$$

dove: M è il fattore di moltiplicazione,
E è l'energia della particella ionizzante in eV.

Per i contatori a BF_3 i risultati riportati sono in discreto accordo con quelli ottenuti da ROSSI [3], se riferiti a uguali condizioni di geometria e di pres-

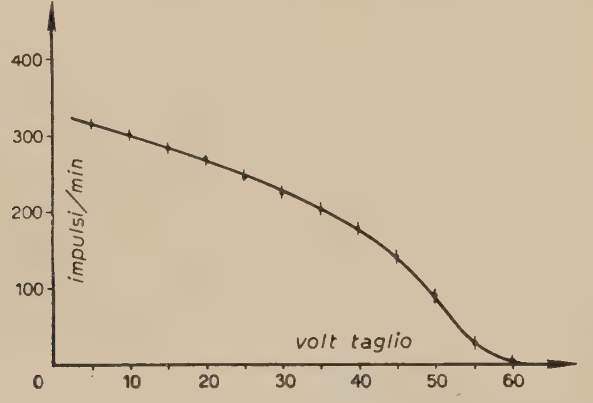


Fig. 5. – Contatore B_2. Volt 2800. Guadagno 89,9 db. Pressione 60 cm BF_3.

sione. È noto che differenze anche piccole nel grado di purezza del BF_3 possono portare a differenze notevoli nel funzionamento dei contatori.

Nel caso di miscele A—BF_3 la curva $M = M(V)$ presenta una salita più ripida che nel caso del solo BF_3, come era da aspettarsi in base ai noti risultati intorno al comportamento dei gas monoatomici e alle miscele di gas mono e poliatomici ottenuti da KORFF [5] e ROSSI [4].

6. – Le curve di taglio (bias curves) per i contatori a BF_3 sono del genere di quella riportata nella fig. 5. L'« effetto parete » ossa il fatto che una parte delle particelle ionizzanti non esaurisce il range nel gas, e la cattura di elettroni dovuta alla presenza di impurità (O_2) nel BF_3, ehe pesa in modo diverso a seconda che gli elettroni primari sono generati presso il filo o in prossimità

---

[6] G. C. HANNA, D. H. W. KIRKWOOD e B. PONTECORVO: *Phys. Rev.*, **75**, 985 (1949).

del catodo, fanno sì che tali curve siano alquanto inclinate per i bassi valori del taglio.

Nel contatore C_2 (12 cm BF_3 + 90 cm A), data la bassa pressione parziale del BF_3 è ridotto l'effetto dell'impurezza del BF_3 e a causa dell'elevata pressione dell'Argon è ridotta l'entità dell'effetto parete: quindi la curva di

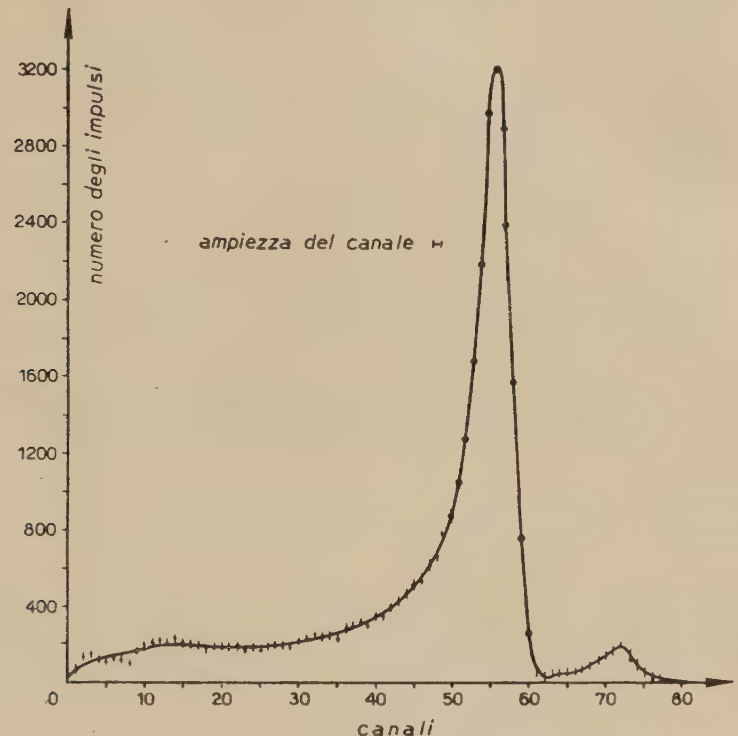


Fig. 6. – Contatore C_2. Pressione 12 cm BF_3 + 95 cm A. volt 2 750. Guadagno 73,3 db. Discriminatore a 99 canali. 0,35 volt/canale. Taglio 5 volt. Spettro di energia della reazione $B_5^{10} + n_0^1$, B_5^{11}, $Li_3^7 + He_2^4$. Sono chiaramente separati i due gruppi di particelle corrispondenti ai due stati in cui viene liberato il nucleo di Li: eccitato (92 %) e fondamentale (8 %). I rapporti di intensità e di energia dei due gruppi sono in accordo con i risultati di altri Autori (vedi, per esempio, A. Stebler, P. Huber e H. Bichsel: *H.P.A.*, 22, 4 (1949).

taglio è notevolmente migliore. Studiando la dispersione in ampiezza degli impulsi con l'analizzatore a 99 canali si è ottenuta la curva di fig. 6. La dipendenza del numero degli impulsi dalla tensione applicata è illustrata nella fig. 7 per alcuni dei contatori esaminati.

Non è stato possibile studiare accuratamente la dipendenza del tempo di salita degli impulsi dalla tensione applicata, poichè il tempo di salita proprio dell'amplificatore (circa 0,6 microsecondi) era, già per tensioni piuttosto basse, maggiore di quello degli impulsi. Si potè constatare soltanto che detto tempo di salita decresceva al crescere della tensione dal valore di 1,5-2 microsecondi

per tensioni di 100-200 volt, fino a circa 0,7 microsecondi in corrispondenza della tensione di saturazione. Per tensioni più elevate, appariva sempre uguale, come è logico attendersi date le caratteristiche dell'amplificatore.

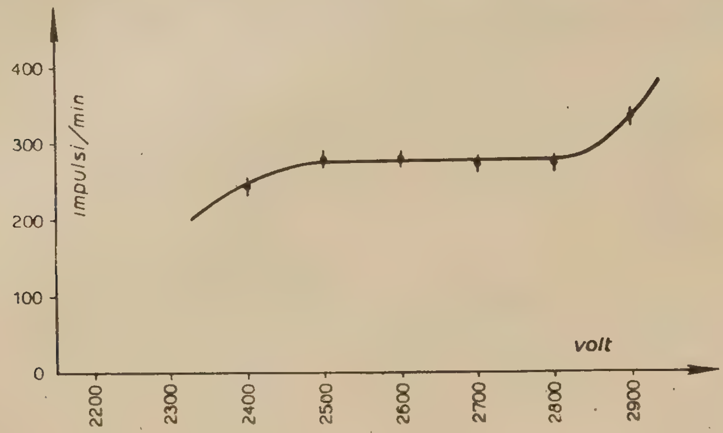


Fig. 7-*a*. – Contatore B_2. Guadagno 96,1 db. Taglio 30 volt. Pressione 60 cm BF_3.

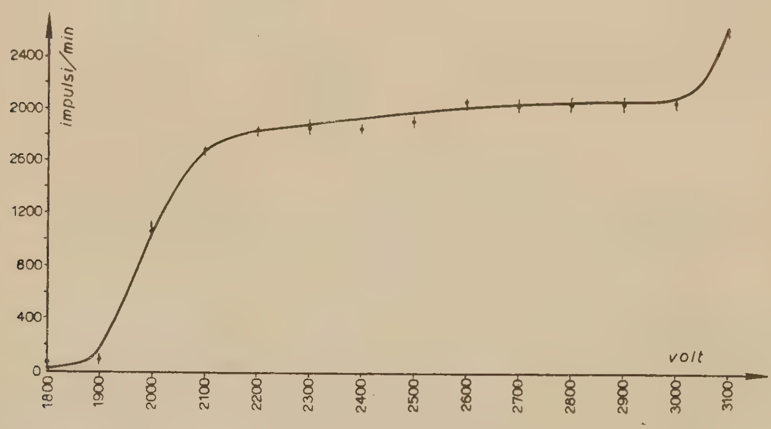


Fig. 7-*b*. – Contatore C_2. Guadagno 82,35 db. Taglio 20 volt. Pressione 12 cm BF_3 + + 95 cm A.

Probabilmente il tempo di salita degli impulsi in zona proporzionale è di pochi decimi di microsecondo.

È stato infine studiato un contatore a catodo sferico del tipo descritto da SALVINI (7), avente le seguenti caratteristiche:

diametro del catodo 90 mm,
diametro dell'elettrodo collettore (di forma anulare) 30 mm;
pressione 50 cm Hg di BF_3 e 16 cm Hg di A.

(7) G. SALVINI: *Ric. Scient.*, **19**, 914 (1947).

In fig. 8 riportiamo la curva di moltiplicazione ottenuta per tale contatore.

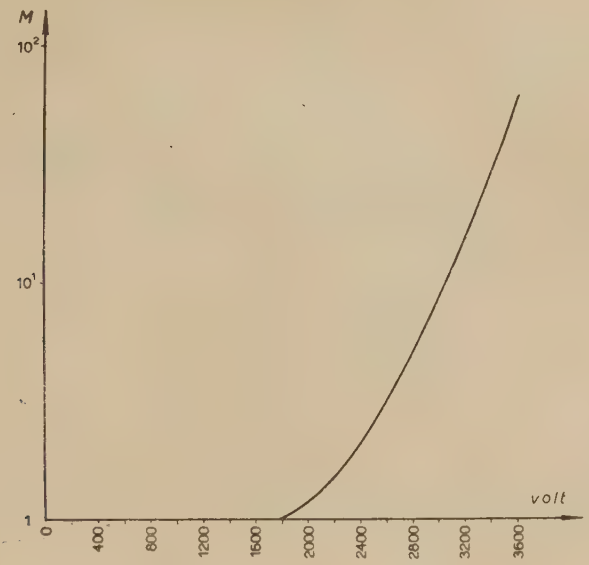


Fig. 8. – Fattore di moltiplicazione *M*. Volt tensione applicata. Contatore sferico tipo Salvini (30 cm BF_3 + 16 cm A).

Siamo grati al prof. BOLLA per gli utili consigli e le frequenti discussioni e all'ing. GATTI del nostro laboratorio elettronico per l'assistenza dataci nel corso del presente lavoro.

SUMMARY

Characteristic properties of some BF_3 and A-BF_3 proportional counters for slow neutrons are described.

IL NUOVO CIMENTO Vol. VII, N. 4 2 Luglio 1950

Preparazione di strati sottili di ossidi d'Uranio per misure radioattive.

E. Zimmer
Laboratori CISE - Milano

(ricevuto l'8 Maggio 1950)

Riassunto. — Si espone un metodo semplice per preparare elettroliticamente strati sottili di composti di Uranio.

---

1. – Lo studio quantitativo dell'emissione di particelle α da parte dell'uranio, soprattutto per quanto riguarda la distribuzione delle energie, si può solo eseguire con sorgenti costituite da strati molto sottili. Ciò è dovuto, come è noto, al limitato cammino delle particelle α in seno ai corpi solidi. Lo stesso vale, a maggior ragione, per i frammenti di fissione dell'uranio. Si calcola che per avere in tali casi un assorbimento trascurabile occorrono strati di composto d'uranio (per lo più un ossido) di massa superficiale specifica non supeziore a 0,2 mg/cm². Tali strati devono inoltre essere, per quanto è possibile, omogenei, per rendere possibili eventuali calcoli e correzioni.

Lo spessore di tali strati non è in genere ottenuto per pesata diretta, sia per evitare gli errori di pesata che hanno una incidenza rilevante per le piccole quantità in gioco, sia per evitare le incertezze sulla composizione chimica degli strati, ottenuti, nella maggior parte dei casi, per elettrolisi. Si preferisce assumere che 1 mg di Uranio emette $1\,502 \pm 1\,^0/_{00}$ particelle α al minuto (¹) e risalire allo spessore dal conteggio delle particelle α emesse dallo strato in studio in una opportuna camera di ionizzazione.

Abbiamo avuto occasione di sviluppare un metodo semplice e rapido per la preparazione di strati sottili di ossidi d'uranio e brevemente ne riferiamo qui. Premettiamo alcune brevissime osservazioni sui metodi che si trovano descritti nella letteratura, che àbbiamo pure sperimentati.

Si trova descritto per esempio, un procedimento elettrolitico sviluppato per determinare con esattezza il percorso in aria dei vari gruppi di particelle α,

---

(¹) C. A. Kienberger: *Phys. Rev.*, **76**, 1561 (1949).

da parte di WYTZES e MAAS [2], senza che risulti però chiaramente il modo tenuto per determinare il quantitativo di uranio depositato e la sua forma di combinazione. Tale metodo è stato da noi sperimentato e riscontrato alquanto irregolare nei suoi risultati, soprattutto per la insufficiente agitazione dell'elettrolito in vicinanza del catodo. Metodi e ricette per ottenere tali strati per via elettrolitica si trovano pure descritti da I. JOLIOT-CURIE [3] e da SUZOR [4], il quale indica pure, senza darne dimostrazione, che lo strato sarebbe costituito da U_3O_8.

2. – I procedimenti descritti si fondano tutti sulla riduzione catodica di soluzioni di nitrato di uranile $UO_2^{++} + 2e \rightarrow UO_2$. Non si può però affatto garantire che il deposito che si forma abbia la suddetta composizione, dato

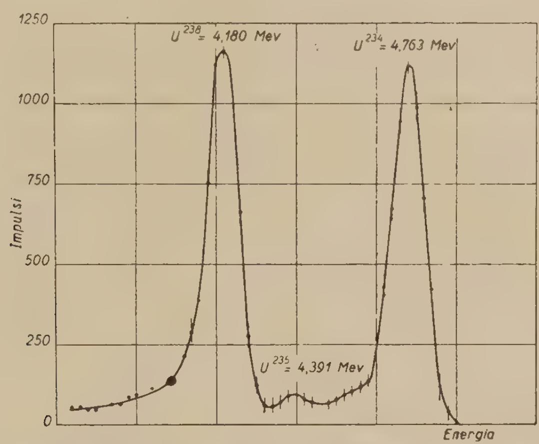


Fig. 1. – Spettro delle particelle α dell'Uranio in strato sottile (0,03 mg cm^{-2}) rilevato mediante camera di ionizzazione rapida, a griglia, e spettrografo di impulsi. Si noti la risoluzione dei 3 gruppi U^{238}, U^{235}, U^{234}.

che è certamente idrato e molto probabilmente si ossida ulteriormente a contatto dell'aria. Per ottenere un deposito uniforme occorre operare con soluzioni diluite (1-5 % di nitrato di uranile) ad una temperatura ottimale che si trova empiricamente essere intorno ai 65 °C, con una efficace agitazione intorno al catodo. La deposizione dell'ossido di uranio dipende in modo poco chiaro dalla natura del catodo.

Abbiamo riscontrato che la deposizione avviene particolarmente bene con catodi in ferro, nichel, acciai inossidabili, particolarmente quelli magnetici. Gli acciai inossidabili a struttura austenitica e quindi non magnetici si comportano irregolarmente, nel senso che talvolta su catodi di tali materiali non si riesce ad ottenere alcun deposito, forse per fenomeni di passivazione che persistono malgrado la polarizzazione catodica.

---

(2) S. A. WYTZES e J. V. D. MAAS: *Physica*, **13**, 49 (1947).

(3) I. JOLIOT-CURIE: *Les Radioéléments naturels* (Paris, 1946), pag. 38.

(4) F. SUZOR: *Ann. de Phys.*, **4**, 273 (1949).

3. – I dischi da ricoprire di ossido di uranio, preferibilmente in acciaio inossidabile, dopo accurata pulitura meccanica (che non è necessario spingere fino all'ottenimento di una superficie speculare) si sottopongono per alcuni minuti ad una operazione di sgrassatura e disossidazione immergendoli come catodo in una soluzione al 10 % di Na_2CO_3 (anodo di nichel, densità di corrente circa 10 A/dm^2). Ciò è necessario per assicurare l'aderenza del successivo deposito. Si lavano quindi con acqua distillata e si sottopongono ad elettrolisi nel bagno di sali d'uranile, della composizione seguente:

acqua distillata	cm^3	500
$UO_2(NO_3)_2 \cdot 6H_2O$	g	1–5
NH_4NO_3	g	20

Temperatura circa 65 °C. Densità di corrente 0,5-1 A/dm^2. Anodo in platino od in platino-iridio: per correnti fino a 0,5 A è sufficiente un cappio di filo del diametro di mm 0,5 lungo 15-20 cm: al caso possono servire elettrodi a rete od a spirale per analisi elettrolitiche. Il disco da ricoprire (catodo) porta al centro un foro filettato cieco sul quale si innesta un gambo, per esempio, di nichel, mediante il quale il disco stesso vien fatto ruotare a circa 500 giri/minuto per tutta la durata della elettrolisi. Disponendo l'anodo sul fondo di un bicchiere cilindrico non molto più grande del disco da trattare e facendo ruotare quest'ultimo nella parte superiore del liquido contenuto nel bicchiere stesso si ottiene la maggior parte del deposito di ossido di uranio sulla faccia inferiore del disco. Un poco di ossido si deposita pure alla periferia della faccia superiore del disco e sui bordi, e si può asportare, volendo, con un abrasivo.

La deposizione di ossido di uranio è accompagnata da un abbondante sviluppo di idrogeno, che però non disturba, se l'agitazione è sufficiente.

Quando lo spessore dello strato supera un certo limite, appaiono colori di interferenza che si susseguono più o meno regolarmente, finchè per spessori ancora più notevoli lo strato appare colorato in grigio scuro. Lo strato appena deposto è ben poco visibile e compare nettamente solo dopo essiccazione. Per regolare approssimativamente la quantità di ossido deposta sul disco, abbiamo adottato un metodo empirico, date le incertezze già accennate a proposito della pesata diretta. Si fissa una durata normale dell'elettrolisi (10 minuti), che corrisponde al periodo della massima velocità di deposizione dell'ossido di uranio: la soluzione diventa successivamente troppo acida per consentire una sensibile deposizione di ossidi di uranio. Si fissa pure una densità di corrente catodica (circa 0,7 A/dm^2). In queste condizioni la quantità di uranio deposta è approssimativamente proporzionale alla quantità di nitrato di uranile inizialmente introdotta nella soluzione. Per esempio, su dischi di acciaio del diametro di mm 50 abbiamo ottenuto i seguenti risultati:

$UO_2(NO_3)_2 \cdot 6HO_2$ in 500 cm^3 di acqua grammi	Deposito di Uranio (dedotto dal conteggio delle particelle in camera di ionizzazione) milligrammi
2	0,73
4	1,57
5	2,30

Nelle condizioni indicate è molto difficile, se non impossibile, ottenere depositi d'uranio superiori a 0,2 mg per cm^2, il che è esattamente quello che si desidera. Il piccolo spessore e la regolarità degli strati di ossido di uranio risultano anche dagli spettri energetici delle particelle α, quali si ricavano dallo studio della distribuzione delle ampiezze degli impulsi forniti dalla camera di ionizzazione (v. fig. 1).

SUMMARY

A simple method is exposed for the electrolitic preparation of thin layers of Uranium compounds.

LETTERE ALLA REDAZIONE

(La responsabilità scientifica degli scritti inseriti in questa rubrica è completamente lasciata dalla Direzione del periodico ai singoli autori)

Cammino libero medio di particelle ionizzanti della radiazione cosmica in emulsione fotografica.

L. Bagalà, M. Merlin e G. Puppi

Istituto di Fisica dell'Università, Centro del C.N.R. per gli ioni veloci - Padova

(ricevuto il 13 Giugno 1950)

È stato recentemente determinato da vari autori (1), (2), (3), (4), (5), (6), (7), il cammino libero medio delle particelle ionizzanti dei raggi cosmici in vari mezzi e con diversi procedimenti. I risultati ottenuti, alquanto discordanti, sembrano scartare tra di loro in dipendenza dal metodo di misura adoperato, i dati in camera di Wilson essendo di massima notevolmente maggiori di quelli ottenuti con lastre nucleari; la ragione di questo divario sta probabilmente nel fatto che nelle misure in camera di Wilson è difficile tener conto del numero di stelle che vengono generate nello spessore dei setti assorbenti, e sfuggono all'osservazione diretta, mentre questo inconveniente non si verifica con le lastre.

In queste condizioni ci è parso interessante procedere ad una nuova determinazione del cammino libero medio nelle lastre nucleari seguendo un ragionamento indipendente dai precedenti, fondato sulla determinazione di due dati: probabilità di creazione di una stella doppia e lunghezza media del tratto congiungente i due centri. Indicando con d lo spessore della lastra, con λ il cammino libero medio, si ottengono, con semplici considerazioni geometriche, le seguenti espressioni per la probabilità p che un ramo generico di range R, uscente da una stella primaria situata ad una qualunque profondità nell'emulsione, dia origine ad una stella secondaria

$$p_{\text{I}} = \frac{R}{2\lambda d}\left[2d - \frac{R}{2}\right], \quad \text{per } R < d\,,$$

$$p_{\text{II}} = \frac{d}{2\lambda}\left[\frac{3}{2} + \log\frac{R}{d}\right], \quad \text{per } R > d\,.$$

Ammetteremo che una particella con range inferiore ad un valore minimo R_0 non abbia energia sufficiente per creare una stella secondaria, e che il numero di particelle compreso fra R ed $R + \mathrm{d}R$ sia dato da una funzione $f(R)$ che al di sopra del limite R_0 possa venire rappresentata mediante la formola (8)

$$f(R)\,\mathrm{d}R = cR^{-k}\,\mathrm{d}R\,.$$

In tali condizioni la probabilità che un

---

(1) U. Camerini, P. H. Fowler, W. O. Lock e H. Muirhead: *Phil. Mag.*, **41**, 413 (1950).

(2) J. B. Harding e D. H. Perkins: *Nature*, **164**, 285 (1949).

(3) C. C. Butler, W. G. V. Rosser e K. H. Barker: *Proc. Phys. Soc.*, **63**, 145 (1950).

(4) W. W. Brown e A. S. McKay: *Phys. Rev.*, **77**, 342 (1950).

(5) A. Lovati, A. Mura, G. Salvini e G. Tagliaferri: *Nature*, **163**, 1003 (1949); *Phys. Rev.*, **77**, 284 (1950).

(6) W. B. Fretter: *Phys. Rev.*, **76**, 511 (1949).

(7) O. Piccioni: *Phys. Rev.*, **77**, 1, 6 (1950).

(8) G. Cortini: *Nuovo Cimento*, **6**, 470 (1949).

ramo qualunque crei una stella secondaria è data da:

$$(1)\qquad \Pi = \int\limits_{d+R_0}^{\infty} p_{\text{II}}(R - R_0) f(R)\, \mathrm{d}R\,,$$

il contributo dovuto al termine p_1 essendo trascurabile.

In modo del tutto analogo si procede per la determinazione della distanza media $\overline{D}$ tra i due centri, ottenendo in definitiva l'espressione:

$$(2)\qquad \overline{D} = \frac{\int\limits_{d+R_0}^{\infty} T_{\text{II}}(R - R_0) f(R)\, \mathrm{d}R}{\int\limits_{R_0}^{\infty} f(R)\, \mathrm{d}R}\,,$$

con

$$T_{\text{II}} = \frac{d}{4}\left[\frac{3}{2} + \log\frac{R}{d}\right].$$

Dividendo (1) per (2) si ottiene:

$$(3)\qquad \lambda = \frac{2\overline{D}}{\Pi}\cdot\frac{cR_0^{1-k}}{k-1}\,.$$

Su di un totale di 4 360 stelle ricavate da lastre Ilford G5 di 200 μ esposte orizzontalmente a quota 4 550 m sul l.d.m. con un numero di rami $\geqslant 3$, sono stati osservati 32 casi di stelle sicuramente doppie, per le quali cioè o la stella secondaria ha due o più rami, o nel caso di un ramo solo vi è una indicazione sicura (in base all'aspetto della traccia), che si tratta di stella e non di scattering. Vi sono però altre stelle apparentemente doppie, con la secondaria di un ramo solo, per le quali non è possibile distinguere a priori se si tratti di stella o di scattering. In questi casi si potrebbero considerare come stelle secondarie tutte quelle per cui l'angolo tra i due rami è maggiore di un certo angolo limite (che risulterebbe di circa 25°) determinato in base al criterio che per esso la probabilità di scattering sia uguale a quella della creazione di una stella ad un ramo ionizzante, ammesso che in quest'ultimo caso la distribuzione sia isotropa. È in corso un lavoro sulle stelle a due rami dal quale si dovrebbero ottenere indicazioni circa l'attendibilità di questo modo di procedere. Nel presente lavoro non abbiamo preso in considerazione le stelle comprese in questa seconda categoria.

Le traccie congiungenti i due centri sono tutte fortemente ionizzanti. Abbiamo ammesso nei calcoli trattarsi sempre di protoni; è però probabile che alcune di esse siano particelle α, e che di conseguenza i risultati che qui diamo vadano parzialmente modificati per tenerne conto.

Fig. 1.

La distribuzione delle distanze è raffigurata nell'istogramma n. 1; la distanza media misurata per le 32 coppie di stelle risulta di $\overline{D} = 453\ \mu$. Assumendo il valore $k = 1{,}25$ per l'esponente dello spettro in range dei protoni ([8]), è possibile dal confronto della (2) coi valori sperimentali ricavare $R_0 = 840\ \mu$ e quindi dalla (3) ottenere:

$$\lambda = 44\ \text{cm} = 175\ \text{g/cm}^2\,.$$

Questo dato è in accordó soddisfacente col valore ricavato dal gruppo di Bristol.

Ulteriori determinazioni sono in corso e verranno rese note in una prossima pubblicazione più estesa.

Ci è grato poter ringraziare il prof. A. Rostagni ed il prof. N. Dallaporta per le utili discussioni sull'argomento.

IL NUOVO CIMENTO VOL. VII, N. 4 2 Luglio 1950

Sulla magnetoresistenza di lamine ferromagnetiche sottili.

A. DRIGO
Istituto di Fisica dell'Università - Ferrara

(ricevuto il 25 Giugno 1950)

Nei ferromagnetici, come è noto (1), la resistenza elettrica è in parte legata al valore della magnetizzazione spontanea. Il campo magnetico d'altra parte fa variare questa resistenza con due processi diversi.

Nei campi deboli, dove possono intervenire solo variazioni della naturale orientazione della magnetizzazione nei singoli domini, si hanno (2) aumenti o diminuzioni di resistenza a seconda che il campo fa diminuire o aumentare l'angolo tra la direzione della magnetizzazione e quella della corrente. Nei campi più intensi invece, i quali possono creare un aumento della magnetizzazione spontanea tanto più sensibile quanto più la temperatura è prossima al punto di Curie, si ha sempre una diminuzione di resistenza, indipendentemente dalla orientazione tra campo e corrente. Tale diminuzione, legata dunque alla « magnetizzazione vera » di WEISS, è in accordo con il legame che passa tra resistenza e magnetizzazione spontanea (1).

Da notare che nessuna variazione di resistenza si produce in corrispondenza ai rovesciamenti (irreversibili) di magnetizzazione, sebbene questi, nei normali campioni ferromagnetici, contribuiscano in grande misura alla magnetizzazione operata con campi superiori al coercitivo.

Qualora si possa astrarre dalle variazioni per magnetizzazione vera si può pertanto affermare che la resistenza elettrica dei ferromagnetici è, con le sue variazioni di origine magnetica, un sensibile indice delle modificazioni di orientazione della magnetizzazione che, nei singoli domini, possono essere provocate sia da campi magnetici, sia da deformazioni elastiche.

Per quel che concerne le variazioni operate dal campo va ricordato che queste prendono origine o dalla rotazione in blocco di tutti gli spin di un dominio, o dallo spostamento della parete che separa domini magnetizzanti in direzioni diverse (ortogonali).

Vari autori (2) (3), e anche lo scrivente (4)

---

(1) W. GERLACH e K. SCHNEIDERHAN: *Ann. der Phys.*, **6**, 772 (1930); A. DRIGO: *Nuovo Cimento*, **9**, 201 (1932); *Atti R. Ist. Ven.*, **93**, II, 1163 (1934).

(2) W. GERLACH: *Ann. der Phys.*, **8**, 649 (1931); K. SCHNEIDERHAN: *Ann. der Phys.*, **11**, 385 (1932); G. ALOCCO: *Nuovo Cimento*, **10**, 153 (1933).

(3) W. GERLACH: *Ann. der Phys.*, **12**, 849 (1932); **14**, 613 (1932); E. ENGLERT: *Ann. der Phys.*, **14**, 589 (1932); *Zeits. f. Phys.*, **74**, 748 (1932); G. ALOCCO: *Nuovo Cimento*, **10**, 355 (1933); R. M. BOZORTH: *Phys. Rev.*, **70**, 923 (1946).

(4) A. DRIGO: *Atti R. Ist. Ven.*, **92**, II, 277 e 886 (1933); *Nuovo Cimento*, **10**, 172 (1934); *En. Elettrica* **11** 683 (1934).

hanno applicato il metodo della magnetoresistenza e della elastoresistenza all'analisi dei processi di rotazione nei ferromagnetici: per questo ho ritenuto ora di qualche interesse procedere al rilievo della magnetoresistenza di sottili lamine ferromagnetiche, di spessore inferiore a quello (di circa 10^{-5} cm) che, secondo la teoria di KITTEL (5) e i risultati di mie esperienze (6), risulta critico per il passaggio da una struttura a domini multipli ad una di saturazione (corrispondente ad un singolo dominio).

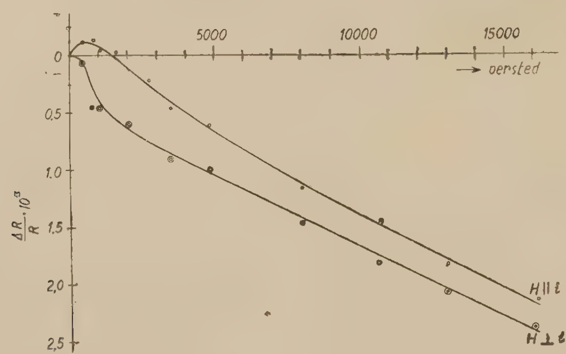


Fig. 1. – Magnetoresistenza di una lamina di Ni della grossezza di $0,8 \times 10^{-6}$ cm.

Come è noto (7), si deve escludere in tal caso ogni magnetizzazione per spostamento del muro di Bloch perchè, essendo questo più grosso dello spessore della lamina, riesce energeticamente sfavorevole; la eventuale magnetizzazione operata dal campo si attribuisce perciò alla rotazione in blocco di tutti gli spin di ogni dominio, ostacolata da intense forze di anisotropia (cristallina ed, eventualmente, di forma).

L'esistenza di tali rotazioni è già stata messa in evidenza col procedimento differenziale che ho usato nelle misure magnetometriche citate (6); dai primi risultati delle misure di magnetoresistenza, tuttora in corso, sembra possibile ricavarne qualche altra proprietà, che mi propongo di segnalare qui.

Per queste misure si è fatto ricorso ad un ponte doppio adoperato col metodo di deviazione. Le lamine, depositate su vetro e munite di elettrodi che ne delimitano una porzione quadrata di circa 0,5 cm di lato, possono essere disposte nel traferro di un grosso elettromagnete in modo che, pur rimanendo col loro piano sempre parallelo alle linee di forza, la corrente elettrica nella lamina può risultare parallela o perpendicolare al campo.

La fig. 1 riporta per una lamina di Nichel di spessore poco inferiore a 10^{-6} cm le variazioni di resistenza ottenute in campo longitudinale (parallelo alla corrente) o trasversale.

Un confronto di queste curve con quelle (8) che sono caratteristiche della magnetoresistenza dei ferromagnetici massicci, del Ni in particolare, mostra che mentre l'effetto longitudinale è nelle lamine prevalentemente negativo, nei campioni grossi è sempre positivo. Inoltre le variazioni di resistenza sono comples-

(5) C. KITTEL: *Phys. Rev.*, **70**, 965 (1946).
(6) A. DRIGO e M. PIZZO: *Nuovo Cimento*, **5**, 196 (1948); **6**, 327 (1949).
(7) C. KITTEL: *Rev. Mod. Phys.*, **21**, 541 (1949); A. DRIGO: *Tecnica Italiana*, fasc. 4° (1950), in corso di stampa.
(8) G. ALOCCO: *Nuovo Cimento*, **10**, 355 (1933); C.W. HEAPS: *Phys. Rev.*, **55**, 1069 (1939).

sivamente molto più piccole: tuttavia, almeno nei campi più alti, le curve per le lamine presentano press'a poco la stessa pendenza come nei campioni massicci, tanto per il campo longitudinale come per quello trasversale.

Le caratteristiche di queste curve potrebbero essere giustificate osservando che le variazioni di resistenza che si hanno nei campi più bassi, pur legate a variazioni che anche nelle lamine dovrebbero avere lo stesso segno come nei campioni massicci, devono tuttavia essere molto più piccole sia per la riscontrata (9) minore intensità di magnetizzazione delle lamine, sia per il fatto che con spessori inferiori a quello critico le rotazioni stesse risultano più difficili, cioè meno ampie.

Viceversa le variazioni di resistenza nei campi più alti, essendo dovute ad un aumento della magnetizzazione spontanea, si mantengono a valori comparabili con quelli dei campioni massicci, e comunque tali da mascherare facilmente le variazioni di resistenza dovute alle rotazioni.

L'andamento di queste prime curve trovate per la magnetoresistenza delle lamine sottili presenta una certa analogia con gli effetti di magnetoresistenza studiati da BATES (10) su leghe ad elevato campo coercitivo. Detta analogia può non apparire fortuita qualora si osservi che, secondo la moderna teoria dei domini, i materiali magneticamente duri si assimilano (11) a raggruppamenti di piccole particelle magnetizzate a saturazione come singoli domini.

Poichè anche le lamine ferromagnetiche di spessore inferiore a quello critico appaiono magneticamente assai dure, mi sembra che i risultati ottenuti da BATES per la magnetoresistenza degli acciai da magneti permanenti possano essere giustificati estendendo ad essi le conclusioni che si possono ricavare da queste prime esperienze di magnetoresistenza di lamine ferromagnetiche sottili.

---

(9) A. DRIGO e M. PIZZO: *Nuovo Cimento*, **6**, 327 (1949).

(10) L. F. BATES: *Proc. Phys. Soc.*, **58**, 153 (1946).

(11) v. (7), p. 547.

Rilievo di iodio nell'ipofisi mediante I^{131}.

A. Ascenzi

Istituto di Anatomia e Istologia Patologica dell'Università - Roma

G. Boato e F. Passalacqua

Istituto di Fisica dell'Università, Centro di studio per la Fisica Nuceare del C.N.R. - Roma

(ricevuto il 28 Giugno 1950)

Utilizzando la tecnica autoradiografica, abbiamo studiato la distribuzione dello iodio, somministrato sotto forma di ioduro sodico marcato con I^{131} (1) nella ipofisi di cavia.

Alcuni animali adulti sono stati iniettati con la dose singola di 0,3 γ di iodio — corrispondenti al quantitativo giornaliero assorbito con l'alimentazione — contenenti 250 μC di I^{131}. Le cavie sono state uccise dopo 24 h e da esse sono state prelevate ipofisi e tiroide.

Da queste ultime, previa inclusione in paraffina, sono state preparate sezioni istologiche molto sottili (2-5 μ) che, raccolte su vetrini portaoggetti, sono state ricoperte con emulsione speciale Kodak per autoradiografia (spessore 5 μ) e lasciate impressionare.

Le sezioni di tiroide (nella quale notoriamente si accumula pressochè tutto lo iodio) sono state sviluppate dopo 18 h; la microfotografia di uno dei corrispondenti autoradiogrammi è presentata nella fig. 1. La comparsa e la distribuzione dello I^{131} nei follicoli tiroidei è in accordo con quanto riferito da altri autori (2). Tale operazione è servita di controllo e riferimento per le osservazioni sull'ipofisi.

Le sezioni di ipofisi sono rimaste esposte per il tempo massimo consigliabile, cioè circa 3 vite medie (21 giorni), e, dopo questo periodo, lo sviluppo dell'emulsione ha rivelato una debole concentrazione di I^{131} nel lobo anteriore della ghiandola, mentre non si è dimostrata presenza di iodio nel lobo posteriore. Un esempio di ciò è dimostrato dalla microfotografia della fig. 2.

Il rilievo costante di tracce di iodio nel lobo anteriore dell'ipofisi verosimilmente legato in forma organica, risulta tanto più interessante qualora si tengano presenti gli stretti nessi correlativi tra tiroide e detto lobo dell'ipofisi e le controversie tuttora aperte sulla dimostrazione della presenza di tiroxina nell' ipofisi stessa (3).

Le ricerche sull'argomento continuano ed una prima parte del lavoro comparirà tra breve su una rivista medica.

Ringraziamo i professori E. Amaldi e G. Bompiani per l'incoraggiamento prestatoci nella presente ricerca.

(1) Lo iodio radioattivo ci è stato fornito dall'A.E.R.E. (Atomic Energy Research Establishment), Harwell (Inghilterra).

(2) C. P. Leblond: *Anat. Record* **88**, 285 (1944); J. G. Hamilton, M. H. Soley e K. B. Eichhorn: *Univ. Calif. (Berkeley) Publs. Pharmacol.*, **1**, 339 (1940).

(3) J. Gross e C. P. Leblond: *Journ. Biol. Chem.*, **171**, 309 (1947); A. Sturm e R. Schneeberg: *Z. Exptl., Med.*, **86**, 665, (1933); F. Joliot, R. Courrier, A. Horeau e P. Süe: *Compt. rend.*, **218**, 769 (1944).

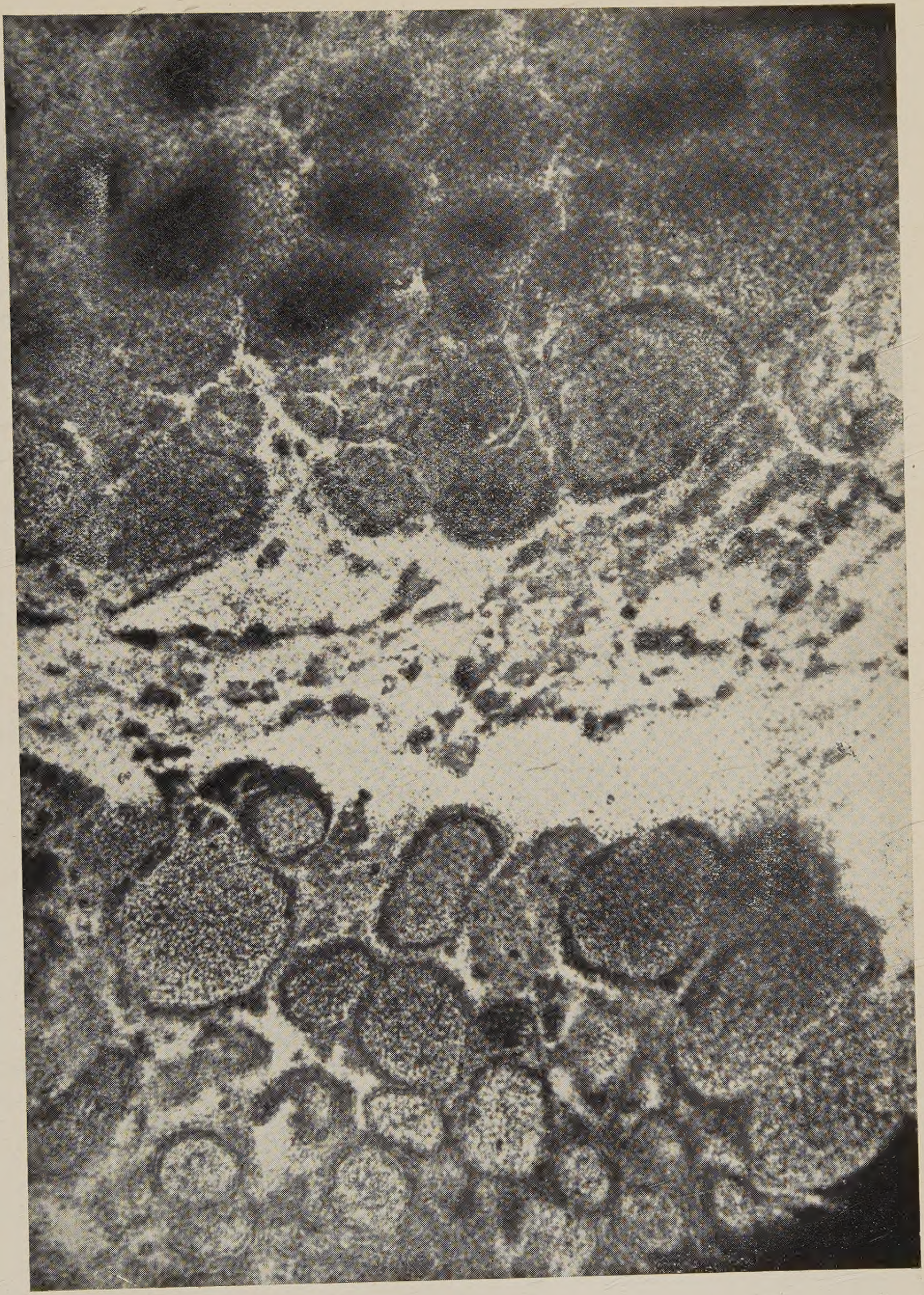


Fig. 1. – Sezione di tiroide di cavia adulta normale e sovrapposta immagine autoradiografica. Ingrandimento 270×.

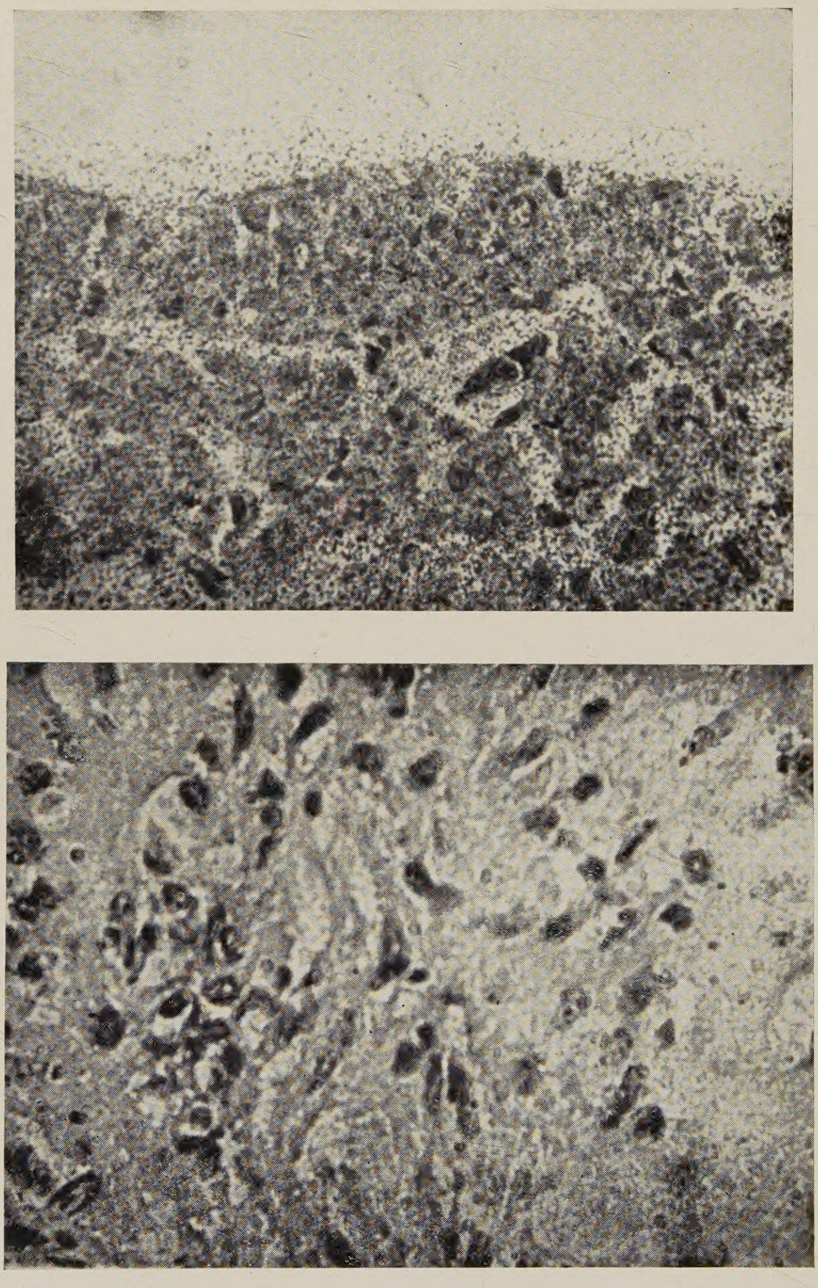


Fig. 2. – Sezioni di lobo anteriore (sopra) e posteriore (sotto) di ipofisi di cavia adulta normale con sovrapposte immagini autoradiografiche. Nel lobo anteriore è evidente la presenza di I^{131}, che manca invece nel lobo posteriore. Ingrandimento 395×.

INFORMAZIONI

Il Comitato Nazionale di Matematica e Fisica del Consiglio Nazionale delle Ricerche, il quale cura le relazioni tra l'Italia e l'Unione Internazionale di Fisica pura ed applicata, ha costituito presso di sè, al fine di rendere più ampie e vive dette relazioni, un Comitato Italiano per la Fisica, formato dai fisici del Comitato Nazionale di Matematica e Fisica, dal Presidente della Società Italiana di Fisica, dal prof. ANTONIO CARRELLI e dal prof. FRANCESCO SCANDONE.

Detto Comitato nazionale comunica che il Comitato esecutivo dell'Unione Internazionale di Fisica, nella prossima riunione di Settembre, in America, assegnerà, tra i vari fisici del mondo, alcune somme destinate a sovvenzionare viaggi all'estero per studi di Fisica.

I soci della nostra Società che abbiano interesse ad usufruire di tali sovvenzioni, le quali però saranno in numero assai esiguo, potranno entro il 20 Agosto 1950 far pervenire domanda al Comitato Esecutivo dell'Unione Internazionale di Fisica, inviandola al prof. EDOARDO AMALDI (C/O Prof. SLATER, Department of Physics, Mass. Inst. of Technology, Cambdrige (Mass., U.S.A.)), e corredandola col programma degli studi che intendono svolgere e con i titoli e l'elenco delle pubblicazioni che attestino la preparazione scientifica posseduta.

* * *

Il Consiglio di amministrazione della « Fondazione Angelo Della Riccia » ha deliberato di assegnare per il 1950 agli italiani studiosi di microfisica, che ne appaiano in modo speciale meritevoli, un premio di lire 300 000, due borse di studio di lire 300 000 ciascuna, quattro sovvenzioni di lire 150 000 ciascuna. Il Consiglio ha inoltre deliberato che una delle borse e due delle sovvenzioni messe a concorso siano destinate esclusivamente a studenti.

Le borse dovranno essere usufruite presso un centro di studi indicato dal candidato e, in caso di assegnazione, approvato dal Comitato scientifico della Fondazione, e saranno corrisposte in due rate uguali, di cui la prima all'inizio del periodo di studio, che dovrà essere non minore di mesi 10, la seconda su presentazione di relazione degli studi compiuti, corredata da certificato dell'Istituto presso il quale la borsa è goduta. Per concorrere alle sovvenzioni il candidato dovrà dichiarare presso quale Istituto scientifico intende compiere le ricerche o gli esperimenti e indicare il materiale e gli strumenti dei quali intende fornirsi o che, beneficiando della sovvenzione; intende impiegare.

Coloro che aspirano al premio, alle borse e alle sovvenzioni dovranno inviare opportuna domanda, corredata del certificato attestante la nazionalità italiana, nonchè i documenti comprovanti gli studi compiuti o in corso di compimento e l'attività scientifica esplicata, con elenco in doppia copia, alla sede della Fondazione (Firenze, Via del Proconsolo, 10, presso l'avv. GIACINTO PACINOTTI), non oltre il 31 Luglio 1950.

Si fa presente che il Comitato scientifico può designare i beneficiari del premio, delle borse e delle sovvenzioni anche fra coloro che non abbiano presentata domanda.

Per ogni altra informazione rivolgersi alla Segreteria della Fondazione.

* * *

Con la somma di un milione di lire generosamente largita dal dottor LUIGI MORANDI, sono stati istituiti due Premi indivisibili di mezzo milione di lire ciascuno, intitolati al nome del chimico prof. GUALTIERO POMA, da conferirsi a cittadini italiani, rispettivamente nel giugno 1951 e nel giugno 1953, per opere di interesse prevalentemente teorico, inedite o pubblicate nel triennio precedente che, alla chiusura del concorso (rispettivamente 31 Dicembre 1950 e 1952), rappresentino un significativo apporto alla Chimica e che, preferibilmente, traggano partito dalle conquiste più recenti della Fisica teorica. Il concorso sarà giudicato da una Commissione di cinque membri, di cui quattro eletti dalla Classe di Scienze fisiche dell'Accademia Nazionale dei Lincei tra i Soci Nazionali della Classe (uno dei quali appartenente alla Sezione di Fisica) e il quinto membro designato dal dottor LUIGI MORANDI o, in caso di suo impedimento, dal professor LIVIO CAMBI. La Commissione può assegnare il Premio anche ad uno studioso di riconosciuto valore, che non abbia preso parte al concorso e che abbia pubblicato, nel triennio precedente la data di chiusura del concorso stesso, un lavoro giudicato superiore a quelli presentati dai concorrenti.

Per altre informazioni rivolgersi alla Cancelleria dell'Accademia Nazionale dei Lincei, Via della Lungara, 10, Roma.

* * *

In occasione delle celebrazioni che, in onore di A. RIGHI, si terranno a Bologna per il primo centenario della sua nascita, verrà pubblicata, per i tipi della Casa Editrice Nicola Zanichelli e sotto gli auspici della Società Italiana di Fisica, una *Scelta di scritti di Augusto Righi*, curata dai professori G. C. DALLA NOCE e G. VALLE. L'opera uscirà verso la metà di Settembre prossimo. Il prezzo dell'opera si aggirerà sulle 4000 lire, a chi si prenota per l'acquisto sarà concesso uno sconto del 10% sul prezzo di copertina. Le prenotazioni vanno inviate alla Casa Editrice Nicola Zanichelli, Bologna.

* * *

Riguardo al Congresso di Fisica che la Società di Fisica, come fu annunciato nel n. 2 del *Nuovo Cimento* di quest'anno, terrà nel prossimo Settembre a Bologna, i Soci riceveranno direttamente lettera d'invito. Comunque chiunque desideri avere informazioni circa il Congresso può rivolgersi alla « Segreteria del Congresso di Fisica », Istituto di Fisica « Augusto Righi », Via Irnerio, 46, Bologna.

Direttore responsabile: G. POLVANI Tipografia Compositori - Bologna

Questo fascicolo è stato licenziato dai torchi il 29-VI-1950